

Разбиения числовых множеств

1. Все натуральные числа, большие единицы, раскрасили в два цвета — синий и красный — так, что сумма каждых двух синих (в том числе одинаковых) — синяя, а произведение каждых двух красных (в том числе одинаковых) — красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2021?
2. Множество целых чисел разбито в объединение непересекающихся бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий с разностями d_i . Пусть $S = \sum \frac{1}{d_i}$.
 - (а) Докажите, что если множество прогрессий конечно, то $S = 1$.
 - (б) Докажите, что если множество прогрессий конечно, то разности каких-то двух совпадают.
 - (в) Докажите, что если множество прогрессий бесконечно, то $S \leq 1$, причём иногда неравенство строгое.
3. Докажите, что для любого n множество натуральных чисел от 1 до n можно разбить на несколько групп так, чтобы сумма чисел в каждой группе была степенью двойки.
4. Можно ли раскрасить натуральные числа в 2021 цвет так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз, и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?
5. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества A_1, A_2, A_3, \dots так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k , равнялась $k + 2021$?
6. Каждое число от 1 до 2021 покрашено в некоторый цвет так, что нет разноцветной тройки чисел, в которой одно число равно сумме двух других. Какое наибольшее число цветов может быть использовано?
7. Существуют ли 2021 непересекающаяся арифметическая прогрессия натуральных чисел такая, что каждая из них содержит простое число, превосходящее 2021, и лишь конечное количество натуральных чисел в них не лежит?