

Стереометрия со сферами

1. Сфера касается сторон многогранного угла. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.
2. В четырёхгранный угол вписана сфера. Докажите, что суммы противоположных плоских углов этого четырёхгранного угла равны.
3. Сфера, вписанная в пирамиду $SABC$, касается граней SAB , SBC , SCA в точках D , E , F соответственно. Найдите сумму углов SDA , SEB и SFC .
4. В тетраэдре $ABCD$ проведено сечение плоскостью, перпендикулярной радиусу описанной сферы, идущему в вершину D . Пусть это сечение пересекло ребра DA , DB , DC в точках A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что точки A , B , C , A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной сфере.
5. Дана четырёхугольная пирамида $SA_1A_2A_3A_4$. Существует сфера ω , которая касается всех рёбер пирамиды и другая сфера ω_1 , которая касается всех сторон основания и продолжений боковых рёбер за вершины основания. Докажите, что все боковые рёбра равны.
6. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)
7. Дана выпуклая четырёхугольная пирамида с вершиной S и основанием $ABCD$, причём существует сфера, вписанная в эту пирамиду. Пирамиду разрезали по рёбрам SA , SB , SC , SD и отогнули грани SAB , SBC , SCD , SDA вовне на плоскость $ABCD$ так, что получился многоугольник $AKBLCMDN$. Докажите, что точки K , L , M , N лежат на одной окружности.
8. Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера ω касается грани BCD в точке T . Сфера ω_1 касается грани BCD в точке T_1 и продолжения граней ABC , ABD , ACD . Докажите, что точки T и T_1 изогонально сопряжены относительно треугольника BCD .
9. Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу Ω . Докажите, что сферы, симметричные Ω относительно прямых SA , SB , SC и плоскости ABC , имеют общую точку. Сфера, симметричная данной относительно прямой ℓ — это сфера такого же радиуса, центр которой симметричен центру исходной сферы относительно прямой ℓ .