Стереометрия без сфер

1. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Все прямые, пересекающие данные, красятся в синий цвет. Какие точки останутся непокрашенными?

2. Дан тетраэдр $ABCD$, в нем I_a, I_b, I_c, I_d — центры вписанных в треугольники BCD, ACD, ABD, ABC окружностей. Оказалось, что отрезки AI_a и BI_b пересекаются. Докажите, что отрезки CI_c и DI_d также пересекаются.

3. В пространстве расположена замкнутая шестизвенная ломаная $ABCDEF$, противоположные звенья которой параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$). При этом AB не равно DE. Докажите, что все звенья ломаной лежат в одной плоскости.

4. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины рёбер SA, SB, SC, SD соответственно пирамиды $SABCD$.
(а) Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.
(б) Известно, что пространственные четырёхугольники ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

5. *(Теорема Менелая)* На рёбрах AB, BC, CD, DA пространственной неплоской ломаной $ABCD$ отмечены точки K, L, M, N соответственно. Докажите, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1.$$

6. Основания трёх высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан граней, к которым они проведены. Докажите, что все рёбра пирамиды равны.

7. Точка O — центр описанной сферы тетраэдра $ABCD$. Обозначим через ℓ_a прямую, соединяющую точку пересечения медиан треугольника BCD с точкой, симметричной A относительно O. Аналогично определим прямые ℓ_b, ℓ_c и ℓ_d.
(а) Докажите, что прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, ℓ_d пересекаются в одной точке (обозначим её через X).
(б) Докажите, что прямая, соединяющая X с серединой ребра AB, перпендикулярна ребру CD.