

Алгебраический разнобой

1. Действительные числа x и y больше 1. Докажите, что $x + y + \frac{1}{xy} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.
2. На доске написано произведение $\log_{\square} \square \cdot \dots \cdot \log_{\square} \square$, всего 50 множителей. У Васи есть 100 карточек: $\boxed{2}, \dots, \boxed{51}$ и $\bigcirc(52), \dots, \bigcirc(101)$. Вася выкладывает круглые карточки на места кружочков и квадратные — на места квадратиков. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями, которые может получить Вася.
3. На координатной плоскости нарисованы четыре графика функций вида $y = x^2 + ax + b$, где a, b — числовые коэффициенты. Известно, что есть ровно четыре точки пересечения, причём в каждой пересекаются ровно два графика. Докажите, что сумма наибольшей и наименьшей из абсцисс точек пересечения равна сумме двух других абсцисс.
4. Верно ли, что на графике функции $y = x^3$ можно отметить такую точку A , а на графике функции $y = x^3 + |x| + 1$ — такую точку B , что расстояние AB не превысит $1/100$?
5. На параболе $y = x^2$ расположены четыре различные точки. Докажите, что они лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда сумма их абсцисс равна 0.
6. Докажите неравенство

$$\frac{2^2 - 2}{2!} + \frac{3^2 - 2}{3!} + \dots + \frac{n^2 - 2}{n!} < 3.$$

7. Про числа a, b, c, d известно, что

$$a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}}, \quad b = \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}}, \quad c = \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}}, \quad d = \sqrt{4 + \sqrt{5 + d}}.$$

Чему равно произведение $abcd$?

8. Можно ли представить функцию e^x в виде суммы нескольких периодических функций?