Числовой разнобой

1. У натурального числа n нашлись такие различные натуральные делители a и b, что
$$(a-1)(b+2)=n-2.$$
Докажите, что $2n$ является квадратом натурального числа.

2. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (n — натуральное) возьмём наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Докажите, что получится n^2.

3. Натуральные числа a, b, c, взаимно простые в совокупности, таковы, что
$$a^2+b^2+c^2=2(ab+ac+bc).$$
Докажите, что a, b, c являются квадратами натуральных чисел.

4. Дано простое $p>2$. Докажите, что числа $1!$, $2!$, $3!$, ..., $p!$ дают при делении на p более $\sqrt{p}$ различных остатков.

5. Конечно или бесконечно множество натуральных N таких, что число $\overline{NN}$ является квадратом?

6. Дано целое число $n \geqslant 100$. Ваня написал числа n, $n+1$, ..., $2n$ на $n+1$ карточке, каждое по одному разу. Затем он перемешал колоду из этих карточек и разделил её на две стопки. Докажите, что хотя бы одна из двух стопок содержит две карточки, сумма чисел на которых — точный квадрат.

7. Найдите наибольшее натуральное число N, для которого уравнение
$$99x+100y+101z=N$$
имеет единственное решение в натуральных числах.

8. При каких натуральных n для всякого натурального $k>n$ найдется число с суммой цифр k, кратное n?