А. В. Доледенок, Е. С. Коган, Д. В. Трещёв

Линейная алгебра в комбинаторике

1. Виктор Дмитриевич вписал числа в клетки квадрата 3×3 так, что получился магический квадрат, а затем все запомнил и стер. Алексей Вадимович может указать на клетку и спросить, какое число было в ней. Какое наименьшее количество вопросов потребуется Алексею Вадимовичу, чтобы восстановить весь квадрат?
(Магический квадрат — такая квадратная таблица с числами, что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинакова.)

2. В классе 20 учеников, они ходили в 21 поход. Докажите, что можно выбрать несколько походов так, что каждый ученик ходил в чётное число из них.

3. Изначально все клетки доски 8×8 покрашены в белый цвет.
(а) За одну операцию разрешается целиком перекрашивать строку или столбец. Сколько различных раскрасок можно получить такими операциями?
(б) За одну операцию разрешается перекрасить все клетки в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций все клетки можно перекрасить в чёрный цвет?

4. Среди многочленов степени не выше n с целыми коэффициентами некоторые особенно раздражают Евгения Сергеевича, причем сумма и разность двух раздражающих многочленов сама является раздражающей. Докажите, что из раздражающих многочленов можно выбрать $n+1$ так, что любой раздражающий многочлен представляется как линейная комбинация выбранных с целыми коэффициентами.

5. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось не меньше чем $n+m-1$ чисел.

6. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое положительное количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участником баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определить сложность вопросов, чтобы места между участниками распределились любым наперед заданным образом. При каком наибольшем числе участников это могло быть?

7. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.

Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.