

Разной по графам

1. Имеется 20 разных бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по две бусинки в каждую коробку. Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные бусинки будут разного цвета, причём количество способов сделать выбор — это степень двойки.
2. В компании из 16 людей среди любых 8 есть один, знающий остальных. Докажите, что в этой компании есть 8 попарно знакомых человек.
3. В стране есть несколько городов, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Пусть P — сумма квадратов количества исходящих дорог для всех городов, а Q — сумма квадратов количества входящих дорог для всех городов. Докажите, что $P = Q$.
4. В связном графе 200 рёбер. За одну операцию разрешается удалить из него два ребра, имеющие общую вершину. Докажите, что с помощью этих операций можно удалить все рёбра.
5. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25-вершинного дерева быть равна 1225?
6. В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Мы можем выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос «есть ли дорога между ними?». Мы хотим узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов.
7. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?
8. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 4 гения. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает приём, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять по крайней мере 3 гениев, как бы ни действовала первая фирма?