

## Линейные пространства. Базисы и размерности

Под *полем* в этом листике мы будем подразумевать одно из следующих множеств:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Z}_p$ .

**Неформальное определение.** Линейным (или векторным) пространством над полем  $F$  называется любое множество  $V$ , элементы которого можно складывать между собой, можно умножать на элементы поля  $F$ , и при этом выполняются очевидные свойства линейности.

**Формальное определение.** Линейное, или векторное, пространство  $V(F)$  над полем  $F$  — это четвёрка  $(V, F, +, \cdot)$ , где  $+$  — это операция сложения элементов из  $V$  (векторов),  $\cdot$  — операция умножения элемента  $F$  на вектор. При этом выполнены свойства:

- сложение векторов коммутативно ( $x + y = y + x$ ), ассоциативно ( $(x + y) + z = x + (y + z)$ ), также в множестве  $V$  есть нулевой вектор  $0$ , такой что  $0 + x = x$  для любого  $x$ , и у каждого вектора  $x$  есть противоположный по сложению вектор  $-x$ , такой что  $x + (-x) = 0$ ;
- для любых  $\alpha, \beta \in F$  и  $x, y \in V$  выполняется
  - ассоциативность умножения:  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ ,
  - унитарность:  $1 \cdot x = x$ , где  $1$  — единичный элемент поля  $F$ ,
  - две дистрибутивности:  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  и  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .

### Примеры линейных пространств:

- пространство векторов на плоскости (а также в трёхмерном пространстве) над полем  $\mathbb{R}$ ;
  - пространство функций, определённых на отрезке  $[a, b]$  над полем  $\mathbb{R}$ ;
  - пространство многочленов от  $k$  переменных над полем  $\mathbb{R}$ .
1. Являются ли следующие множества векторными пространствами (над полем  $\mathbb{R}$ , если не указано обратное) относительно естественных операций:
    - (а)  $\mathbb{C}$ ;
    - (б) решения произвольной СЛУ от  $n$  переменных;
    - (в) решения однородной СЛУ от  $n$  переменных;
    - (г) многочлены, имеющие фиксированный корень  $x_0$ ;
    - (д) многочлены степени ровно 2021;
    - (е) многочлены степени не выше 1000000;
    - (ж) неубывающие последовательности вещественных чисел;
    - (з) строки длины  $n$  действительных чисел с нулевой суммой;
    - (и) бесконечные периодические последовательности остатков по простому модулю  $p$  над полем  $\mathbb{Z}_p$ ;
    - (к)  $\mathbb{R}$  над  $\mathbb{Q}$ ;
    - (л) функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  (над  $\mathbb{Q}$ );
    - (м) функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  (над  $\mathbb{R}$ );
    - (н) функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (над  $\mathbb{Q}$ )?

**Определение.** Набор векторов  $v_1, \dots, v_n \in V$  называется *линейно зависимым*, если существуют числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ , не все равные нулю, такие что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ . В противном случае набор называется *линейно независимым*.

**Определение.** Набор линейно независимых векторов  $e_1, \dots, e_n \in V$  называется *базисом*, если любой вектор  $v \in V$  представим в виде линейной комбинации векторов  $e_1, \dots, e_n$ , то есть существуют такие числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ , что  $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ .

2. (а) Пусть каждый из векторов  $u_1, \dots, u_m$  представим в виде линейной комбинации векторов  $v_1, \dots, v_n$ . Пусть  $m > n$ . Докажите, что векторы  $u_1, \dots, u_m$  линейно зависимы.
- (б) Пусть векторное пространство  $V$  имеет два базиса  $u_1, \dots, u_n$  и  $v_1, \dots, v_m$ . Докажите, что  $m = n$ .

**Определение.** Число элементов в базисе называется *размерностью* пространства. (Бывают пространства с бесконечными базисами и, соответственно, с бесконечной размерностью. Мы их рассматривать не будем).

3. Пусть в пространстве размерности  $n$  выбрана линейно независимая система  $v_1, \dots, v_k$ . Докажите, что ее можно дополнить до базиса, то есть выбрать такие векторы  $v_{k+1}, \dots, v_n$ , что набор  $v_1, \dots, v_n$  образует базис.
4. Пусть  $V$  — конечномерное пространство. Докажите, что любое его подпространство  $U$  тоже конечномерно. (Подпространство в пространстве  $V$  — любое подмножество в  $V$ , являющееся линейным пространством относительно тех же операций).
5. Алексей Вадимович и Виктор Дмитриевич независимо друг от друга привели одну и ту же систему линейных уравнений к ступенчатому виду. При этом у Алексея Вадимовича получилось  $k$  свободных переменных, а у Виктора Дмитриевича —  $l$ . Докажите, что  $k = l$ .
6. Пусть последовательность  $a_n$  задана рекуррентным соотношением  $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ ; значения  $a_1$  и  $a_2$  выбираются произвольно. Пусть корни многочлена  $x^2 - \alpha x - \beta$  — различные действительные числа  $u$  и  $v$ .
  - (а) Докажите, что для любых  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  последовательность  $a_n = C_1 u^n + C_2 v^n$  удовлетворяет рекуррентному соотношению.
  - (б) Существуют ли другие последовательности, удовлетворяющие нашему соотношению?