Около систем счисления

Факт. Натуральное число n можно представить единственным образом в виде $n = \sum\limits_{i=0}^{m-1} a_i k^i$, где a_i — это целые числа, удовлетворяющие неравенству $0 \leqslant a_i \leqslant k-1$. Такое представление числа называется записью в k-ичной системе счисления.

1. Докажите, что любое натуральное число n можно единственным образом представить в виде
(а) $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_m}$, где $\{F_i\}$ — последовательность чисел Фибоначчи, $k_m > 1$ и $k_i > k_{i+1} + 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m-1$.
(б) $n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \ldots$, где $0 \leqslant a_i \leqslant i$ для всех i.

2. Имеется 100 палочек, из которых можно сложить 100-угольник. Может ли случиться, что ни из какого меньшего числа этих палочек нельзя сложить невырожденный многоугольник?

3. $P(x)$ — непостоянный многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что числа 1 и 2 являются его корнями. Докажите, что у многочлена найдётся коэффициент, который меньше -1.

4. **(а)** Какое наименьшее число гирь необходимо для того, чтобы иметь возможность взвесить любое число граммов от 1 до 100 на чашечных весах, если гири можно класть на одну чашу весов?
(б) То же самое, только гири можно класть на обе чаши весов.

5. Существуют ли 100 прямоугольников, из которых можно составить любой клетчатый прямоугольник со сторонами, не превосходящими 1000?

6. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один — преступник, еще один — свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?

7. Имеется цепочка из 150 звеньев, каждое из которых весит 1 грамм. Какое наименьшее число звеньев надо расковать так, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса от 1 до 150 грамм (раскованное звено тоже весит 1 грамм)?

8. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

9.* Есть n гирь, никакие две гири не весят одинаково. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах можно определить самую тяжёлую гирю?