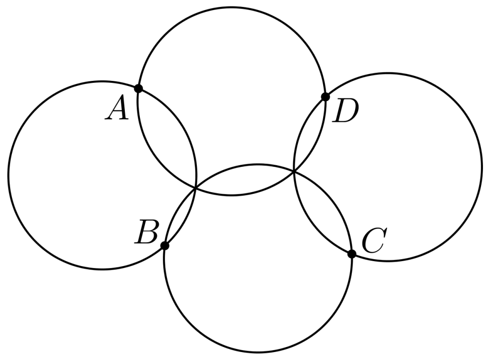
Геометрический разнобой

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C вписанная окружность касается катета BC в точке K. Докажите, что хорда вписанной окружности, высекаемая прямой AK в два раза больше, чем расстояние от вершины C до этой прямой.

2. Четыре равных окружности расположены, как показано на рисунке. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.



3. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E такая, что углы ABD и EBC равны. Окружность с центром O проходит через точки D и E и касается прямой AD в точке D. Докажите, что точка O равноудалена от точек A и C.

4. В угол с вершиной в точке O вписаны окружности ω_1 и ω_2. Луч, выходящий из вершины угла, пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D (точки лежат на луче в порядке O, A, C, B, D). Касательная в точке B к окружности ω_1 пересекается с касательной в точке C к окружности ω_2 в точке P. Докажите, P лежит на прямой, содержащей общую хорду окружностей ω_1 и ω_2.

5. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке I. Пусть Ω — описанная окружность треугольника AIC. Продолжение отрезка BA за точку A пересекает Ω в точке X, продолжение отрезка BC за точку C пересекает Ω в точке Z. Продолжения отрезков AD и CD за точку D пересекают Ω в точках Y и T соответственно. Докажите, что

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

6. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Прямая O_1B вторично пересекает окружность ω_2 в точке C, прямая O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке D. Пусть X — вторая точка пересечения AC и ω_1, а Y — вторая точка пересечения BD и ω_2. Докажите, что $CX = DY$.

7. Внутри правильного n-угольника взята точка, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на $2n$ отрезков. Покрасим эти отрезки в шахматном порядке в два цвета. Докажите, что сумма длин отрезков одного цвета равна сумме длин отрезков другого цвета.

8. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный AC. Докажите, что прямые BP и DQ пересекаются на прямой AC.