

## Системы линейных уравнений — II

Напомним, что система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная система линейных уравнений имеет единственное решение.

1. Докажите, что если все коэффициенты в системе линейных уравнений рациональны, и у системы есть хотя бы одно решение, то у неё есть и решение в рациональных числах.
2. У вас есть чашечный весы и 100 выхухолей, которые весят одинаково. Вы радостно сообщаете Алексею Вадимовичу, что вес всех выхухолей одинаков. Однако Алексей Вадимович не верит на слово и просит доказательств. Докажите, что вам потребуется не менее 99 взвешиваний, если Алексей Вадимович готов поверить, что вес выхухоли является
  - (а) действительным числом;
  - (б) положительным действительным числом.*(За одно взвешивание можно убедить Алексея Вадимовича, что веса некоторых двух наборов выхухолей совпадают).*
3. Есть 101 корова. Если убрать любую корову, то оставшихся можно поделить на две части, равные по весу и численности. Докажите, что коровы весят одинаково, если вес каждой коровы
  - (а) натуральный;
  - (б) рациональный;
  - (в) вещественный.
4. На доске выписано 100
  - (а) целых;
  - (б) действительных чисел.Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.
5. Внутри отрезка  $[0; 1]$  выбрали  $n$  различных точек. Отмеченной точкой назовём одну из  $n$  выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних  $n$  точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.
6. Пусть  $P(x, y)$  — произвольный многочлен второй степени. Назовем множество точек на координатной плоскости, в которых  $P(x, y)$  обращается в 0, кривой второго порядка. На плоскости даны 5 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует единственная кривая второго порядка, проходящая через них.  
*(Возможно, вам поможет задача 4 из прошлого листика).*
7. Квадрат со стороной 1 разрезан на квадраты. Докажите, что сторона каждого квадрата рациональна.