Системы линейных уравнений – I

Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1; \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

Две СЛУ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ назовем *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений. Рассмотрим следующие *элементарные преобразования*:

- поменять местами две строки;
- умножить строку на ненулевое число;
- прибавить к строке другую строку, умноженную на число.

1. **(а)** Докажите, что если одну СЛУ можно получить из другой СЛУ при помощи последовательного применения элементарных преобразований, то они эквивалентны.

(б) Верно ли обратное утверждение, то есть верно ли, что если есть две эквивалентные СЛУ с одинаковым числом уравнений и переменных, то одну из них можно получить из другой при помощи элементарных преобразований?

2. Докажите, что при помощи элементарных операций любую СЛУ можно привести к *ступенчатому виду,* то есть виду

$$\begin{cases} c_{1,k}x_k + c_{2,k+1}x_{k+1} + \quad \ldots \quad + c_{1,n}x_n = d_1 \\ \quad c_{2,l}x_l + c_{2,l+1}x_{l+1} + \quad \ldots \quad + c_{2,n}x_n = d_2 \\ \ldots \\ \qquad c_{r,s}x_s + \quad \ldots \quad + c_{r,n}x_n = d_r; \\ \qquad 0 = d_{r+1}; \\ \qquad \ldots \\ \qquad 0 = d_m \end{cases}$$

где $k < l < \ldots < s \leqslant n$ и $c_{1,k} \cdot c_{2,l} \cdot \ldots \cdot c_{r,s} \neq 0$.

3. СЛУ называется *однородной*, если $b_1 = \ldots = b_n = 0$. Пусть $m = n$, и у однородной системы есть только нулевое решение. Докажите, что любая система, получающаяся из данной заменой правой части, будет иметь единственное решение.

4. **(а)** Докажите, что если у квадратной ($m = n$) однородной системы не одно решение, то одно из её уравнений следует из остальных (то есть множество его решений содержит пересечение множеств решений остальных).

(б) В однородной системе уравнений на одно меньше, чем неизвестных. Докажите, что если не все решения пропорциональны, то одно из уравнений следует из остальных.

5. Имеется клетчатая таблица $(k + 2) \times (l + 2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

6. Натуральное число n не делится на 3. По кругу сидят n хамелеонов красного и синего цвета. Каждую минуту все хамелеоны, у которых соседи разного цвета, одновременно от испуга перекрашиваются в другой цвет: синие — в красный, красные — в синий. Остальные хамелеоны цвета не меняют. Докажите, что рано или поздно все хамелеоны одновременно вернут себе первоначальный цвет.