11 класс | Разнобой 3 | 7 апреля 2022

1. Для натуральных чисел t, a, b определим (t, a, b)-игру следующим образом. Изначально на доске записано число t, далее каждым ходом любой игрок может вычесть из числа на доске либо a, либо b. Докажите, что существует бесконечно много таких t, для которых первый игрок выигрывает во всех (t, a, b)-играх при любых a, b с условием $a + b = 2022$.

2. Двое играют в следующую игру. Изначально первый пишет число 1. Далее каждый может в свой ход либо удвоить последнее написанное число, либо прибавить к нему 1. При этом запрещается писать число, большее N. Побеждает тот, кто напишет N. При каких N побеждает второй игрок?

3. Над словом, состоящим из букв a и b, можно проводить следующие операции: заменять aba на b и наоборот, а также заменять bba на a и наоборот. Можно ли из слова $aaa \dots ab$ получить слово $baa \dots a$, где в обоих словах по 2021 букве a?

4. В стране Графия 100 городов, пронумерованных числами от 1 до 100, причём некоторые из них соединены двухсторонними дорогами (между любыми двумя городами может быть только одна дорога). Турист хочет совершить 100 путешествий в эту страну. В путешествии номер i турист начинает с города с номером i. Далее турист каждый день смотрит на город с минимальным номером среди соседей текущего, и в случае если он ещё не был посещён в текущем путешествии, переезжает в него, а в противном случае заканчивает путешествие. Оказалось, что после того, как турист совершил все 100 путешествий, каждый город оказался посещённым одинаковое число раз. Какое максимальное число дорог может быть в стране?

5. Найдите наименьшее действительное число t для которого любыми 5 равносторонними треугольниками с суммой площадей t можно покрыть равносторонний треугольник площади 1.

6. Золушка и мачеха играют в следующую игру. В вершинах правильного 5-угольника расставлены пустые двухлитровые вёдра. В свой ход мачеха берёт литр воды из реки и разливает его в вёдра как хочет. Золушка в свой ход выливает из двух соседних вёдер всю воду в реку. Мачеха хочет, чтобы одно из вёдер переполнилось. Может ли Золушка этому помешать?

7. Дан граф с n вершинами без рёбер. Двое по очереди проводят не проведённое ранее ребро. Проигрывает тот, после чьего хода появится нечётный цикл. Кто выигрывает при правильной игре?

8. В языке волков две буквы: А и У, любая конечная последовательность букв которых образует слово. Слово Y называется потомком слова X, если Y получается из X вычеркиванием некоторых букв (например, слово ААУА имеет 8 потомков — А, У, АА, АУ, УА,ААУ, АУА, ААА). Для каждого натурального n определите, какое наибольшее число потомков может иметь n-буквенное слово языка волков.

9. Пусть n — натуральное число, взаимно простое с 6. В правильном n-угольнике все вершины покрасили в 3 цвета так, что каждого цвета нечётное количество вершин. Докажите, что найдётся разноцветный равнобедренный треугольник.

10. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, а также набор M из $n - 1$ натурального числа, не содержащий $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Кузнечик начинает в точке 0 вещественной оси, и должен сделать n прыжков с длинами $a_1, a_2, \dots, a_n$ в некотором порядке. Докажите, что он может прыгать так, чтобы не попасть ни в одно число из M.

11 класс | Разнобой 3 | 7 апреля 2022

1. Для натуральных чисел t, a, b определим (t, a, b)-игру следующим образом. Изначально на доске записано число t, далее каждым ходом любой игрок может вычесть из числа на доске либо a, либо b. Докажите, что существует бесконечно много таких t, для которых первый игрок выигрывает во всех (t, a, b)-играх при любых a, b с условием $a + b = 2022$.

2. Двое играют в следующую игру. Изначально первый пишет число 1. Далее каждый может в свой ход либо удвоить последнее написанное число, либо прибавить к нему 1. При этом запрещается писать число, большее N. Побеждает тот, кто напишет N. При каких N побеждает второй игрок?

3. Над словом, состоящим из букв a и b, можно проводить следующие операции: заменять aba на b и наоборот, а также заменять bba на a и наоборот. Можно ли из слова $aaa \dots ab$ получить слово $baa \dots a$, где в обоих словах по 2021 букве a?

4. В стране Графия 100 городов, пронумерованных числами от 1 до 100, причём некоторые из них соединены двухсторонними дорогами (между любыми двумя городами может быть только одна дорога). Турист хочет совершить 100 путешествий в эту страну. В путешествии номер i турист начинает с города с номером i. Далее турист каждый день смотрит на город с минимальным номером среди соседей текущего, и в случае если он ещё не был посещён в текущем путешествии, переезжает в него, а в противном случае заканчивает путешествие. Оказалось, что после того, как турист совершил все 100 путешествий, каждый город оказался посещённым одинаковое число раз. Какое максимальное число дорог может быть в стране?

5. Найдите наименьшее действительное число t для которого любыми 5 равносторонними треугольниками с суммой площадей t можно покрыть равносторонний треугольник площади 1.

6. Золушка и мачеха играют в следующую игру. В вершинах правильного 5-угольника расставлены пустые двухлитровые вёдра. В свой ход мачеха берёт литр воды из реки и разливает его в вёдра как хочет. Золушка в свой ход выливает из двух соседних вёдер всю воду в реку. Мачеха хочет, чтобы одно из вёдер переполнилось. Может ли Золушка этому помешать?

7. Дан граф с n вершинами без рёбер. Двое по очереди проводят не проведённое ранее ребро. Проигрывает тот, после чьего хода появится нечётный цикл. Кто выигрывает при правильной игре?

8. В языке волков две буквы: А и У, любая конечная последовательность букв которых образует слово. Слово Y называется потомком слова X, если Y получается из X вычеркиванием некоторых букв (например, слово ААУА имеет 8 потомков — А, У, АА, АУ, УА,ААУ, АУА, ААА). Для каждого натурального n определите, какое наибольшее число потомков может иметь n-буквенное слово языка волков.

9. Пусть n — натуральное число, взаимно простое с 6. В правильном n-угольнике все вершины покрасили в 3 цвета так, что каждого цвета нечётное количество вершин. Докажите, что найдётся разноцветный равнобедренный треугольник.

10. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, а также набор M из $n - 1$ натурального числа, не содержащий $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Кузнечик начинает в точке 0 вещественной оси, и должен сделать n прыжков с длинами $a_1, a_2, \dots, a_n$ в некотором порядке. Докажите, что он может прыгать так, чтобы не попасть ни в одно число из M.