Геометрический разнобой

1. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром в точке O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает стороны AD и BC в точках N и K соответственно. Докажите, что четырёхугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, в которой $\angle ABC > 90°$. На боковой стороне AB отмечена точка M. Обозначим через O_1 и O_2 центры описанных окружностей треугольников MAD и MBC соответственно. Описанные окружности треугольников MO_1D и MO_2C вторично пересекаются в точке N. Докажите, что прямая O_1O_2 проходит через точку N.

3. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором выполняется равенство $\angle BAC + \angle BAD = \angle ABC + \angle ABD = 90°$. Пусть O — цетнр описанной окружности треугольника ABC, M — середина отрезка CD. Докажите что прямые AB и MO перпендикулярны.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Биссектрисы углов BB_1C и CC_1B пересекаются в точке X и пересекают сторону BC в точках D и E соответственно. Докажите, что прямая AX проходит через вторую точку пересечения описанных окружностей треугольников BXE и CXD.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны AD и DC в точках P и Q соответственно. Описанная окружность треугольника ADC пересекает стороны AB и BC в точках S и R соответственно. Оказалось, что четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм. Докажите, что $ABCD$ — также параллелограмм.

6. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle B = \angle D = 90°$. На отрезке AB выбрана точка M такая, что $AD = AM$. Лучи DM и CB пересекаются в точке N. Точки H и K — основания перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямые AC и AN соответственно. Докажите, что $\angle MHN = \angle MCK$.

7. На сторонах AB и BC неравнобедренного треугольника ABC нашлись такие точки P и Q соответственно, что $AP = PQ = QC$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке B пересекает прямую PQ в точке R. Докажите, что R равноудалена от B и центра I вписанной в треугольник PBQ окружности.

8. Точки B_0 — середина стороны AC треугольника ABC, точка B_1 — середина дуги AC, не содержащей точку B. Обозначим через ω_b окружность, построенную на отрезке A_0A_1 как на диаметре. Аналогично определим окружности ω_a и ω_c. Докажите, что длины общей внешней касательной окружностей ω_a и ω_b и общей внешней касательной окружностей ω_a и ω_c равны.

9. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. Диагонали основания AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. Оказалось, что SP — высота пирамиды. Докажите, что точки пересечения высот боковых граней лежат в одной плоскости.

10. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.

[ЦПМ, кружок по математике, 11 класс]
[2021-2022] группа: 11 класс *7 апреля 2022 г.*

Геометрический разнобой

1. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром в точке O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает стороны AD и BC в точках N и K соответственно. Докажите, что четырёхугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, в которой $\angle ABC > 90°$. На боковой стороне AB отмечена точка M. Обозначим через O_1 и O_2 центры описанных окружностей треугольников MAD и MBC соответственно. Описанные окружности треугольников MO_1D и MO_2C вторично пересекаются в точке N. Докажите, что прямая O_1O_2 проходит через точку N.

3. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором выполняется равенство $\angle BAC + \angle BAD = \angle ABC + \angle ABD = 90°$. Пусть O — цетнр описанной окружности треугольника ABC, M — середина отрезка CD. Докажите что прямые AB и MO перпендикулярны.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Биссектрисы углов BB_1C и CC_1B пересекаются в точке X и пересекают сторону BC в точках D и E соответственно. Докажите, что прямая AX проходит через вторую точку пересечения описанных окружностей треугольников BXE и CXD.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны AD и DC в точках P и Q соответственно. Описанная окружность треугольника ADC пересекает стороны AB и BC в точках S и R соответственно. Оказалось, что четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм. Докажите, что $ABCD$ — также параллелограмм.

6. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle B = \angle D = 90°$. На отрезке AB выбрана точка M такая, что $AD = AM$. Лучи DM и CB пересекаются в точке N. Точки H и K — основания перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямые AC и AN соответственно. Докажите, что $\angle MHN = \angle MCK$.

7. На сторонах AB и BC неравнобедренного треугольника ABC нашлись такие точки P и Q соответственно, что $AP = PQ = QC$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке B пересекает прямую PQ в точке R. Докажите, что R равноудалена от B и центра I вписанной в треугольник PBQ окружности.

8. Точки B_0 — середина стороны AC треугольника ABC, точка B_1 — середина дуги AC, не содержащей точку B. Обозначим через ω_b окружность, построенную на отрезке A_0A_1 как на диаметре. Аналогично определим окружности ω_a и ω_c. Докажите, что длины общей внешней касательной окружностей ω_a и ω_b и общей внешней касательной окружностей ω_a и ω_c равны.

9. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. Диагонали основания AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. Оказалось, что SP — высота пирамиды. Докажите, что точки пересечения высот боковых граней лежат в одной плоскости.

10. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.