11 класс	Разнобой — 1	4 апреля 2022

1. Дано натуральное n. Рассмотрим все наборы целых неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с суммой $n-1$. Найдите НОД всех произведений вида $C_n^{x_1} \cdot C_n^{x_2} \cdot \ldots \cdot C_n^{x_n}$.

2. Существует ли положительное a такое, что при всех действительных x верно неравенство $|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax$?

3. Докажите, что если $1 < a < b < c$, то

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0.$$

4. Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \ldots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n.$$

5. Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдётся натуральное число N такое, что оно представляется в виде $N = a^p + b^p$ с натуральными a и b и простым p тогда и только тогда, когда $p \in P$.

6. Существуют ли ненулевые числа a, b, c такие, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

7. Можно ли все натуральные числа, не превосходящие 2016, разбить на непересекающиеся семёрки так, чтобы сумма чисел в каждой семёрке делилась на 2017?

8. Дано натуральное число $n > 3$. При каком наименьшем k верно следующее утверждение?

Для любых n точек $A_i = (x_i, y_i)$ общего положения на плоскости и любых действительных чисел c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ существует многочлен $P(x, y)$ степени не выше k такой, что $P(x_i, y_i) = c_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

9. Дано действительное $a > 1$. Существует ли бесконечная ограниченная последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ такая, что для любых $i \neq j$ верно

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geqslant 1?$$