11-1	Теорема Кронекера	17 марта 2022

1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. Каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α, где α — иррациональное число. Докажите, что не позже чем через 1000 секунд он окажется на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).

2. а) Два кузнечика прыгают по окружности длины 1. Они стартуют одновременно из одной точки и за каждую секунду первый прыгает по часовой стрелке с шагом длины α, а второй – с шагом длины β. Докажите, что в какой-то момент времени (не позднее чем через 1000^2 секунд) оба кузнечика одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от исходной точки.

б) Та же задача для n кузнечиков и 1000^n секунд.

3. Две мошки ползут по окружности длины 1 по часовой стрелке с постоянными скоростями, причем отношение этих скоростей иррационально. Они стартуют одновременно из каких-то начальных точек (возможно, разных). Докажите, что в какой-то момент обе мошки одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от фиксированной точки A.

4. Два кузнечика прыгают по окружности длины 1. Они стартуют одновременно из каких-то начальных точек (возможно, разных), и за каждую секунду первый прыгает по часовой стрелке с шагом длины α, а второй – с шагом длины β, причем число $k\alpha + l\beta$ не является целым для любых целых k, l, не равных одновременно 0. Докажите, что в какой-то момент времени оба кузнечика одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от фиксированной точки A.

5. а) Три мошки ползут по единичной окружности по часовой стрелке с постоянными скоростями $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$. Они стартуют одновременно из каких-то начальных пунктов (возможно, разных). Докажите, что в какой-то момент времени все три мошки одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от фиксированной точки A.

б) Та же задача про трех кузнечиков с соответствующими длинами прыжков.

6. Числа $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *рационально независимы*, т.е. если для некоторых рациональных чисел $c_0, c_1, \ldots c_n$ выполнено $c_0 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n = 0$, то $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. Докажите, что кузнечики с длинами прыжков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots a_n$ одновременно окажутся сколь угодно близко к любой точке единичной окружности, вне зависимости от того, где они начинают.

Применяем накопленные знания и идеи.

7. В начале координат сидит охотник, а во всех остальных целочисленных точках координатной плоскости сидит по круглому зайцу радиуса $\varepsilon > 0$. Докажите, что в каком бы направлении ни выстрелил охотник, он попадёт в какого-нибудь зайца.

8. Докажите, что существует число Фибоначчи, начинающееся с цифр 2022.

9. Докажите, что существует такое натуральное n, что числа 7^n и 8^n начинаются с цифр 20222022.

10. На какую цифру чаще всего начинается степень двойки?

11. Дана последовательность, n-ый член которой есть первая цифра числа 2^n. Рассматриваются 13-значные числа, записанные тринадцатью идущими подряд цифрами этой последовательности. Докажите, что имеется ровно 57 различных чисел такого вида.