11-1	Геометрия	10 марта 2022

1. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Точка B_1 симметрична точке B относительно стороны AC. Прямые AO и B_1C пересекаются в точке K. Докажите, что луч KA является биссектрисой угла BKB_1.

2. Точка P внутри остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle BAP = \angle CAP$. Точка M — середина стороны BC. Прямая MP пересекает описанные окружности треугольников ABP и ACP в точках D и E соответственно (точка P лежит между точками M и E, точка E лежит между точками P и D). Оказалось, что $DE = MP$. Докажите, что $BC = 2BP$.

3. На стороне AC треугольника ABC взяли такую точку D, что угол BDC равен углу ABC. Чему равно наименьшее возможное расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, если $BC = 1$?

4. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J. Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к описанной окружности треугольника AKL в точке A пересекает прямую BC в точке P. Докажите, что $PA = PJ$.

5. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает лучи AA_1 и CC_1 в точках A_2 и C_2 соответственно. Точка O_a — центр описанной окружности треугольника AC_1C_2, точка O_c — центр описанной окружности треугольника CA_1A_2. Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$.

6. Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P, лежащей внутри треугольника. Известно, что $PA_1 = PB_1 = PC_1$. Докажите, что перпендикуляры, восстановленные в точках A_1, B_1 и C_1 к сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

7. Из точки на вписанной окружности треугольника провели касательные к трём вневписанным окружностям. Докажите, что из этих отрезков можно составить прямоугольный треугольник тогда и только тогда, когда она лежит на одной из средних линий треугольника.