# 11-1 Компактность и непрерывность 3 марта 2022

**Аксиома полноты.** Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ таковы, что $\forall a \in A, b \in B$ выполнено $a \leqslant b$. Тогда существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a \in A, b \in B$ $a \leqslant c \leqslant b$.

**Аксиома полноты – 2.** Любое ограниченное сверху подмножество прямой имеет точную верхнюю грань.

**1.** Докажите, что возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.

**2. а)** Докажите, что множество четвёрок чисел $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ таких, что $x_i \geqslant 0$, $x_1 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4 = 1$ и $x_1 + \sqrt{x_2} + \sqrt[3]{x_3} + \sqrt[4]{x_4} = 1$, секвенциально компактно.

**б)** Докажите, что существует четвёрка, удовлетворяющая указанным условиям, такая, что выражение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ принимает наименьшее возможное значение.

**3.** Пусть $F_1, F_2$ – две замкнутые ограниченные фигуры на плоскости. Докажите, что существуют такие точки $X_1 \in F_1$, $X_2 \in F_2$, что расстояние $|X_1X_2|$ наименьшее возможное. Можно ли отказаться от условия ограниченности?

**4.** Пусть $a, b, c$ – положительные числа $X$ – некоторая точка на плоскости. Рассмотрим всевозможные треугольники $ABC$ такие, что $XA = a$, $XB = b$, $XC = c$. Докажите, что среди них найдётся треугольник с наибольшим периметром.

**5.** Пусть $X$ – секвенциальный компакт, $f\colon X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция.

**а)** Докажите, что $f$ ограничена на $X$.

**б)** Докажите, что $f$ достигает на $X$ наибольшего и наименьшего значения.

**6.** Пусть $F_1, F_2$ – две замкнутые ограниченные фигуры на плоскости.

**а)** Докажите, что существуют две точки $X_1 \in F_1$, $X_2 \in F_2$, расстояние между которыми равно $\rho(F_1, F_2) = \sup_{A \in F_1} \inf_{B \in F_2} |AB|$.

**б)** Верно ли, что $\rho(F_1, F_2) = \rho(F_2, F_1)$?


# 11-1 Компактность и непрерывность 3 марта 2022

**Аксиома полноты.** Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ таковы, что $\forall a \in A, b \in B$ выполнено $a \leqslant b$. Тогда существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a \in A, b \in B$ $a \leqslant c \leqslant b$.

**Аксиома полноты – 2.** Любое ограниченное сверху подмножество прямой имеет точную верхнюю грань.

**1.** Докажите, что возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.

**2. а)** Докажите, что множество четвёрок чисел $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ таких, что $x_i \geqslant 0$, $x_1 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4 = 1$ и $x_1 + \sqrt{x_2} + \sqrt[3]{x_3} + \sqrt[4]{x_4} = 1$, секвенциально компактно.

**б)** Докажите, что существует четвёрка, удовлетворяющая указанным условиям, такая, что выражение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ принимает наименьшее возможное значение.

**3.** Пусть $F_1, F_2$ – две замкнутые ограниченные фигуры на плоскости. Докажите, что существуют такие точки $X_1 \in F_1$, $X_2 \in F_2$, что расстояние $|X_1X_2|$ наименьшее возможное. Можно ли отказаться от условия ограниченности?

**4.** Пусть $a, b, c$ – положительные числа $X$ – некоторая точка на плоскости. Рассмотрим всевозможные треугольники $ABC$ такие, что $XA = a$, $XB = b$, $XC = c$. Докажите, что среди них найдётся треугольник с наибольшим периметром.

**5.** Пусть $X$ – секвенциальный компакт, $f\colon X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция.

**а)** Докажите, что $f$ ограничена на $X$.

**б)** Докажите, что $f$ достигает на $X$ наибольшего и наименьшего значения.

**6.** Пусть $F_1, F_2$ – две замкнутые ограниченные фигуры на плоскости.

**а)** Докажите, что существуют две точки $X_1 \in F_1$, $X_2 \in F_2$, расстояние между которыми равно $\rho(F_1, F_2) = \sup_{A \in F_1} \inf_{B \in F_2} |AB|$.

**б)** Верно ли, что $\rho(F_1, F_2) = \rho(F_2, F_1)$?