11-1 **Тригонометрия** 21 февраля 2022

1. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников.

2. Сумма синусов трёх углов равна 2. Докажите, что сумма косинусов этих же углов не превосходит $\sqrt{5}$.

3. Какое наибольшее количество множителей можно вычеркнуть в левой части уравнения $\sin\frac{\pi}{x}\cdot\sin\frac{2\pi}{x}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{2022\pi}{x}=0$ так, чтобы количество его натуральных корней не изменилось?

4. Докажите, что при любом натуральном $k>2022$ в произведении

$$f(x)=\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\cdot\ldots\cdot\cos 2^k x$$

можно заменить один cos на sin так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех x неравенству $|f_1(x)|\leqslant\frac{3}{2^{k+1}}$.

5. Докажите неравенство $\sin^n 2x+(\sin^n x-\cos^n x)^2\leqslant 1$.

6. Действительное число x таково, что обе суммы $\sin 64x+\sin 65x$ и $\cos 64x+\cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в какой-то из этих сумм оба слагаемых рациональны.

7. Верно ли, что при любых ненулевых целых a и b система

$$\begin{cases}\operatorname{tg}13x\cdot\operatorname{tg}ay=1,\\ \operatorname{tg}21x\cdot\operatorname{tg}by=1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

8. Пусть $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ — положительные числа такие, что при всех x верно $\sin\alpha x+\sin\beta x=\sin\gamma x+\sin\delta x$. Докажите, что $\alpha=\gamma$ или $\alpha=\delta$.

9. Сколько раз функция $f(x)=\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2022}$ меняет знак на отрезке $[0,\frac{2022\pi}{2}]$?

10. Даны натуральные числа $n>m$. Докажите, что для всех $x\in(0;\frac{\pi}{2})$ справедливо неравенство

$$2|\sin^n x-\cos^n x|\leqslant 3|\sin^m x-\cos^m x|.$$

11. При каких натуральных n для любых чисел α,β,γ, являющихся величинами углов остроугольного треугольника, справедливо неравенство $\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma<0$?