11-1 Секвенциальная компактность 14 февраля 2022

Соглашение. Всюду в этом листке речь идёт о подмножествах плоскости или прямой.

Точка $X \in F$ называется *внутренней* точкой F, если она содержится в F вместе с некоторой своей ε-окрестностью. Точка X называется *граничной* точкой F, если в любой её ε-окрестности есть точки как лежащие, так и не лежащие в F.

Множество F называется *открытым*, если любая точка $X \in F$ является внутренней для F. Множество F называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Упражнение. Каким является пустое множество? Вся плоскость?

1. Докажите, что множество F замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.

2. Докажите, что объединение любого числа открытых множеств открыто, а объединение конечного числа замкнутых замкнуто. Верно ли аналогичное утверждение для объединения бесконечного числа замкнутых множеств?

Множество X называется *секвенциально компактным*, если из любой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу X.

Упражнение. Осознайте, что любое конечное множество секвенциально компактно.

3. Докажите, что отрезок $[0,1]$ секвенциально компактен.

Указание. Любое действительное число может быть представлено как бесконечная десятичная дробь.

4. а) Докажите, что если F – секвенциальный компакт, то F замкнуто и ограничено.

б) Докажите, что если F замкнуто и ограничено, то F – секвенциальный компакт.

5. Пусть F – секвенциальный компакт, $X_n, Y_n \in F$, причём длины $|X_nY_n|$ стремятся к l. Докажите, что существуют точки $X, Y \in F$ такие, что $|XY| = l$.

6. Пусть F_n, $n \in \mathbb{N}$ – выпуклые ограниченные замкнутые фигуры, пересечение любых трёх из которых непусто. Докажите, что пересечение их всех непусто. Можно ли отказаться от условия ограниченности/замкнутости?

7. Пусть действительные числа $x_n < y_n$ таковы, что $\cup[x_n, y_n] = \mathbb{R}$. Докажите, что существует такое N, что

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_i) > 10^{100}.$$