11-1 По мотивам регионалки 10 февраля 2022

1. В некоторой компании среди любых 100 человек количество пар друзей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

2. Дан непостоянный многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами. Известно, что $a_{n-k} = a_k$ при всех $k = 0, 1, \ldots, n$, и $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$. Докажите, что число $P(2022)$ делится на квадрат некоторого натурального числа, большего 1.

3. На плоскости отмечены N точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем N это возможно?

4. Пусть CE — биссектриса остроугольного треугольника ABC. На биссектрисе внешнего угла ACB отмечена точка D, а на стороне BC — точка F, причём $\angle BAD = 90^\circ = \angle DEF$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CEF лежит на прямой BD.

5. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, пронумерованных числами $1, 2, \ldots, 100$ по часовой стрелке. За ход разрешается поменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться любого расположения фишек?

6. В окружность ω вписан шестиугольник $AECDBF$. Известно, что точка D делит дугу BC пополам, а треугольники ABC и DEF имеют общую вписанную окружность. Прямая BC пересекает отрезки DF и DE в точках X и Y, а прямая EF пересекает отрезки AC и AB в точках Z и T соответственно. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.

7. Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше 10^{100}.