

Пределом последовательности $\{a_n\}$ называется такое число a , что $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$. В этом случае говорят также, что *последовательность* $\{a_n\}$ *стремится к* a .

Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ стремится к бесконечности, если $\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ выполнено $|a_n| > M$. Аналогичное определение можно сформулировать для плюс/минус бесконечности.

Теорема Вейерштрасса. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

1. Найдите предел последовательности

а) $\frac{n^2 - n + 1}{2n^2 - 3}$; б) $\frac{2^n}{n}$; в) $1, 01^n$; г) $0, 99^n$; д) $\sqrt[n]{2}$.

2. а) Докажите, что если последовательность имеет предел, то она ограничена.

б) Докажите, что если у последовательности есть предел, то он единственный.

3. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, c — действительное число. Докажите, что

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ при $b \neq 0$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a}$ при $a_n \geq 0$.

4. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $x_1 = 0$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

5. Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Докажите, что существует неограниченная возрастающая последовательность b_n такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

Предельной точкой последовательности a_n называется такое число b , что $\forall \varepsilon > 0$ существует бесконечно много $n \in \mathbb{N}$ таких, что $|a_n - b| < \varepsilon$.

Упражнение. Осознайте, что предел последовательности является её предельной точкой. Верно ли обратное?

6. Какие из следующих множеств могут быть множествами предельных точек некоторой последовательности?

а) \emptyset ; б) n различных чисел; в) \mathbb{Z} ; г) \mathbb{Q} ; д) \mathbb{R} .

7. Докажите, что если b — предельная точка последовательности $\{a_n\}$, то у $\{a_n\}$ есть подпоследовательность, стремящаяся к b .

8. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Может ли у последовательности $\{a_n\}$ быть ровно две предельных точки?

9. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

10. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$, $a_1 = 1$.

а) Докажите, что a_n неограниченно возрастает.

б) Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}}$.