11-1	Теория чисел	13 января 2022

1. Найдите все натуральные числа k такие, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k.

2. При каких натуральных $n \geqslant 3$ существуют n последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых является делителем НОКа остальных $n-1$ чисел?

3. Для натурального числа $n > 8$ выпишем в порядке возрастания все натуральные числа, взаимно простые с n, меньшие n. При каких n выписанные числа образуют арифметическую прогрессию?

4. Тройку натуральных чисел (a, b, c) назовём *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки существует другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число.

5. Даны натуральное число n и нечётное натуральное число k. Целые числа a, b, c таковы, что $a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka$. Докажите, что $a = b = c$.

6. Существует ли последовательность из миллиона натуральных чисел, взаимно простых с 10, в которой каждое следующее число делится на предыдущее, но имеет меньшую сумму цифр?

7. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (m, n) таких, что $n! + 1$ делится на m, но $m - 1$ не делится на n.

8. Найдите все пары натуральных чисел (m, n), больших 2, для которых существует бесконечно много натуральных a таких, что число $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ — целое.