

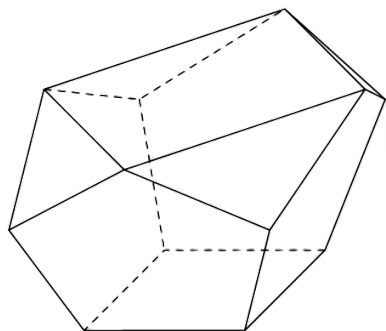
1. У Абдуламина есть 300 палочек, из которых он складывает многоугольники, каждая сторона которых состоит из одной палочки.

а) Пусть он смог сложить 100 треугольников. Какое наибольшее количество четырёхугольников он гарантированно сможет сложить?

б) Пусть он смог сложить 75 четырёхугольников. Какое наибольшее количество треугольников он гарантированно сможет сложить?

2. Докажите, что для любого простого  $p$  среди любых  $p + 1$  подряд идущих чисел Фибоначчи найдётся число, делящееся на  $p$ .

3. У многогранника, изображённого на рисунке, гранями являются четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?



4. На бесконечной полоске клетчатой бумаги записаны целые числа. Докажите, что для любых натуральных  $m$  и  $n$  найдутся  $m$  одинаковых отрезков, идущих подряд, таких, что сумма чисел внутри каждого из них делится на  $n$ .

5. Для положительных чисел  $x, y, z$  докажите, что

$$\frac{x-y}{xy+2y+1} + \frac{y-z}{zy+2z+1} + \frac{z-x}{xz+2x+1} \geq 0.$$

6. Точка  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , а точка  $M$  — середина стороны  $BC$ . На окружности с диаметром  $AH$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $M$  лежит на  $PQ$ . Докажите, что ортоцентр треугольника  $APQ$  лежит на описанной окружности  $ABC$ .

7. Лягушка прыгает по целым точкам координатной плоскости, стартуя из начала координат. Каждый прыжок может быть сделан либо на 1 вправо, либо на 1 вверх. Отметим все точки, где побывала лягушка.

а) Обязательно ли найдётся прямая, проходящая через бесконечное количество отмеченных точек?

б) Обязательно ли для любого  $n$  найдётся прямая, проходящая хотя бы через  $n$  отмеченных точек?

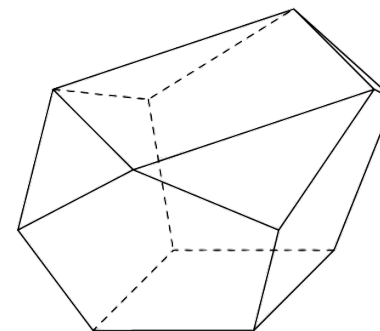
1. У Абдуламина есть 300 палочек, из которых он складывает многоугольники, каждая сторона которых состоит из одной палочки.

а) Пусть он смог сложить 100 треугольников. Какое наибольшее количество четырёхугольников он гарантированно сможет сложить?

б) Пусть он смог сложить 75 четырёхугольников. Какое наибольшее количество треугольников он гарантированно сможет сложить?

2. Докажите, что для любого простого  $p$  среди любых  $p + 1$  подряд идущих чисел Фибоначчи найдётся число, делящееся на  $p$ .

3. У многогранника, изображённого на рисунке, гранями являются четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?



4. На бесконечной полоске клетчатой бумаги записаны целые числа. Докажите, что для любых натуральных  $m$  и  $n$  найдутся  $m$  одинаковых отрезков, идущих подряд, таких, что сумма чисел внутри каждого из них делится на  $n$ .

5. Для положительных чисел  $x, y, z$  докажите, что

$$\frac{x-y}{xy+2y+1} + \frac{y-z}{zy+2z+1} + \frac{z-x}{xz+2x+1} \geq 0.$$

6. Точка  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , а точка  $M$  — середина стороны  $BC$ . На окружности с диаметром  $AH$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $M$  лежит на  $PQ$ . Докажите, что ортоцентр треугольника  $APQ$  лежит на описанной окружности  $ABC$ .

7. Лягушка прыгает по целым точкам координатной плоскости, стартуя из начала координат. Каждый прыжок может быть сделан либо на 1 вправо, либо на 1 вверх. Отметим все точки, где побывала лягушка.

а) Обязательно ли найдётся прямая, проходящая через бесконечное количество отмеченных точек?

б) Обязательно ли для любого  $n$  найдётся прямая, проходящая хотя бы через  $n$  отмеченных точек?