Функции на плоскости – 2. Степень точки

Утверждение. Рассмотрим окружность ω, заданную уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y) = (x-a)^2+(y-b)^2-R^2$. Докажите, что $f(x_0, y_0)$ равно степени точки с координатами (x_0, y_0) относительно ω.

В задачах бывает полезно рассмотреть некоторую функцию, зависящую от степеней точки относительно разных окружностей.

1. (*Лемма о соосных окружностях.*) Даны окружности ω_1 и ω_2.
(a) Докажите, что геометрическим местом точек X таких, что $\mathrm{Pow}_{\omega_1} X = k\cdot\mathrm{Pow}_{\omega_2} X$, где $k \neq 1$, является либо окружность (возможно, нулевого радиуса), имеющая общую радикальную ось с ω_1 и ω_2, либо пустое множество. Что будет при $k = 1$?
(b) Пусть ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, и для некоторых точек P и Q выполнено равенство
$$\frac{\mathrm{Pow}(P, \omega_1)}{\mathrm{Pow}(P, \omega_2)} = \frac{\mathrm{Pow}(Q, \omega_1)}{\mathrm{Pow}(Q, \omega_2)}.$$
Докажите, что точки A, B, P, Q лежат на одной окружности или прямой.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает окружности в точках C и D. Докажите, что середины отрезков CD лежат на одной окружности.

3. Даны две непересекающиеся окружности ω_a и ω_b. Рассматриваются всевозможные пары точек A на ω_a и B на ω_b такие, что длины касательных из A к ω_b и из B к ω_a равны. Докажите, что середины всех отрезков AB лежат на одной прямой.

4. Полувписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q соответственно и касается описанной окружности треугольника ABC внутренним образом в точке T. Отрезки AT и PQ пересекаются в точке S. Докажите, что $\angle ABS = \angle ACS$.

5. На стороне BC треугольника ABC лежит точка D. Окружности, описанные около треугольников ABD и ACD, повторно пересекают стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AEF, проходят через фиксированную точку на медиане из вершины A, не зависящую от положения точки D на стороне BC.

6. Точка P на вписанной окружности треугольника ABC такова, что из отрезков касательных из точки P к трём вневписанным окружностям треугольника ABC можно составить прямоугольный треугольник. Докажите, что P лежит на средней линии треугольника.

7. Четырёхугольник $ABCD$ не является вписанным. Докажите, что
$$\frac{1}{\mathrm{Pow}(A, (BCD))} + \frac{1}{\mathrm{Pow}(B, (ACD))} + \frac{1}{\mathrm{Pow}(C, (ABD))} + \frac{1}{\mathrm{Pow}(D, (ABC))} = 0.$$
(Через (XYZ) обозначена описанная окружность треугольника XYZ.)

8. Дан неравнобедренный треугольник ABC, AA_1 — его биссектриса, A_2 — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Аналогично определяются точки B_1, B_2, C_1, C_2. Пусть O — центр описанной около треугольника окружности, I — центр вписанной в него окружности. Докажите, что радикальный центр окружностей, описанных около треугольников AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, лежит на прямой OI.