11-1 Теорема Ван дер Вардена 16 декабря 2021

Теорема Ван дер Вардена. Для любых натуральных k и r существует такое натуральное $W(k,r)$, что при любой раскраске чисел $\{1,2,\ldots,W(k,r)\}$ в r цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины k.

Задачи около того.

1. Докажите, что можно покрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы не нашлось бесконечной одноцветной арифметической прогрессии.

Упрощённая теорема. При любой раскраске натурального ряда в r цветов найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины k.

2. Докажите, что из упрощённой теоремы следует изначальная.

Применяем, не доказав.

В задачах этого блока можно использовать теорему Ван дер Вардена без доказательства.

3. Пусть $\{a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $a_{i+1} - a_i < 2021$ для любого i. Из теоремы Ван дер Вардена выведите, что эта последовательность содержит сколь угодно длинные арифметические прогрессии.

4. Назовём множество арифметических прогрессий *последовательным*, если их длины равны, разности совпадают, а первые члены — последовательные натуральные числа. Докажите, что при любой покраске натурального ряда в 10 цветов найдутся 100 последовательных одноцветных арифметических прогрессий длины 1000.

5. Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрашены в n цветов.
а) Докажите, что найдутся 100 строк и 100 столбцов, на пересечении которых стоят клетки одного цвета.
б) Докажите, что найдутся 100 строк и 100 столбцов, на пересечении которых стоят клетки одного цвета, причём все эти строки отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии k, а все эти столбцы — на одинаковом расстоянии l (для некоторых чисел k и l).

6. Докажите, что для любого действительного θ существует такое натуральное n, что θn^2 отличается от целого числа менее чем на 10^{-100}.

7. Плоскость покрашена в 100 цветов. Докажите, что существует треугольник площади 1, все вершины которого покрашены в один цвет.

Доказываем саму теорему.

Будем доказывать теорему индукцией по k. База очевидна. Далее будем доказывать переход $k-1 \to k$.

Определение. *Пучком прогрессий ранга d, радиуса k, с корнем в a* назовём набор из d различных арифметических прогрессий длины k, все из которых начинаются с одного и того же числа a. Каждую из этих прогрессий (без корня) будем называть веткой пучка. Будем говорить, что пучок является *полихроматическим*, если внутри каждой ветки все числа покрашены в один цвет и эти цвета различны для разных веток.

Лемма. Предположим, что теорема Ван дер Вардена верна для $k-1$. Тогда для любого натурального $d \leqslant r$ существует такое натуральное $M(k,d,r)$, что при любой раскраске чисел $\{1,2,\ldots,M(k,d,r)\}$ в r цветов найдется либо одноцветная арифметическая прогрессия длины k, либо полихроматический пучок радиуса k и ранга d.

8. а) Докажите, что из леммы следует переход.
б) Докажите лемму индукцией по d.