11-1	Мегаразнобой	13 декабря 2021

1. На доске написано натуральное число. Раз в минуту Максим прибавляет к числу на доске какой-то его положительный делитель, записывает на доску результат и стирает прошлое число. При этом ему запрещено дважды подряд прибавлять одно и то же число. Докажите, что он может действовать так, чтобы на доске когда-нибудь оказался точный квадрат.

2. Даны шесть действительных чисел $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$. Для каждой тройки различных чисел из этих шести Витя вычислил их сумму. Оказалось, что все 20 полученных сумм попарно различны; обозначим их через

$$s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{19} < s_{20} .$$

При этом $x_2 + x_3 + x_4 = s_{11}$, $x_2 + x_3 + x_6 = s_{15}$ и $x_1 + x_2 + x_6 = s_m$. Найдите m.

3. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что P лежит между B и Q. Лучи AP и AQ делят угол BAC на три равные части. Оказалось, что треугольник APQ является остроугольным. Обозначим через B_1, P_1, Q_1, C_1 проекции точек B, P, Q, C на прямые AP, AQ, AP, AQ соответственно. Докажите, что прямые B_1P_1 и C_1Q_1 пересекаются на прямой BC.

4. Есть сейф, который можно открыть, введя *секретный код*, состоящий из n цифр, каждая из которых — это 0 или 1. Изначально было введено n нулей, но сейф остался закрыт.

За одну попытку можно ввести произвольную последовательность из n цифр, каждая из которых — это 0 или 1. Если введённая последовательность совпадёт с секретным кодом, то сейф откроется. Если введённая последовательность совпадет с секретным кодом в большем количестве позиций, чем предыдущая введённая последовательность, то будет слышен щелчок. В иных случаях сейф останется закрытым и щелчка не будет. За какое наименьшее количество попыток гарантированно удастся открыть сейф?

5. Сумма неотрицательных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ равна $\frac{n}{2}$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим

$$b_i = a_i + a_i a_{i+1} + a_i a_{i+1} a_{i+2} + \ldots + a_i a_{i+1} \ldots a_{i+n-2} + 2a_i a_{i+1} \ldots a_{i+n-1} ,$$

где $a_{j+n} = a_j$ для всех j. Докажите, что $b_i \geqslant 1$ хотя бы для одного индекса i.

6. Точка M внутри тетраэдра $ABCD$ такова, что $\angle MAD = \angle MBC$ и $\angle MDB = \angle MCA$. Докажите, что

$$MA \cdot MB + MC \cdot MD < \max(AD \cdot BC, AC \cdot BD) .$$