Функции на плоскости (и в пространстве)

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют вещественные a, b, c такие, что для любой точки $A(x, y)$ выполнено равенство $f(A) = ax + by + c$.

Утверждение 1. Уравнение $f(x, y) = d$ для действительного d задаёт либо пустое множество, либо прямую, либо всю плоскость.

Утверждение 2. Для любых точек A, B, C и вещественных λ и μ таких, что точка C делит отрезок AB в отношении $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB} = \mu/\lambda$, верно равенство

$$f(C) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}f(A) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}f(B).$$

Верно и обратное — если функция удовлетворяет такому свойству, то она линейная.

Примеры линейных функций: константа, ориентированное расстояние до фиксированной прямой, ориентированная площадь треугольника XBC с фиксированным основанием BC.

1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1.
(a) Докажите, что для любой точки на отрезке B_1C_1 расстояние от неё до прямой BC равно сумме расстояний от неё до прямых AB и AC.
(b) Пусть AA_1 — биссектриса внешнего угла A. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.
(c) Докажите, что основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой OI, где O и I — центры описанной и вписанной окружностей соответственно.

2. **(a)** (*Прямая Гаусса.*) В четырёхугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Докажите, что середины отрезков AC, BD, EF лежат на одной прямой.
(b) (*Прямая Ньютона.*) Докажите, что в описанном четырёхугольнике центр вписанной окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

3. У тетраэдра $ABCD$ сумма площадей двух граней с общим ребром AB равна сумме площадей граней с общим ребром CD. Докажите, что середины ребер BC, AD, AC и BD лежат в одной плоскости, причём эта плоскость содержит центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$.

4. Внутри правильного n-угольника взята точка, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на $2n$ отрезков. Покрасим эти отрезки в шахматном порядке в два цвета. Докажите, что сумма длин отрезков одного цвета равна сумме длин отрезков другого цвета.

Факт. Две различные коники пересекаются не более чем в 4 точках.

5. Точки A, B, C, D лежат на конике, заданной уравнением $f = 0$. Докажите, что для некоторых α и β выполнено равенство

$$f = \alpha \cdot \ell_{AB}\ell_{CD} + \beta \cdot \ell_{AC}\ell_{BD},$$

где ℓ_{XY} — уравнение прямой XY.

6. *(Теорема Паскаля)* Точки A, B, C, D, E, F лежат на одной конике. Докажите, что точки пересечения пар прямых AB и DE, BC и EF, AF и CD лежат на одной прямой.

7. Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на одной конике.
(a) Докажите, что прямые Паскаля шестиугольников

$$ABCDEF,\ ADEBCF,\ ADCFEB$$

пересекаются в одной точке.
(b) Докажите, что прямые Паскаля шестиугольников

$$ABFDCE,\ AEFBDC,\ ABDFEC$$

пересекаются в одной точке.