

## Фазовое пространство

В некоторых задачах вам может понадобиться следующий факт: площадь «колечка» ширины  $h$  на сфере радиуса  $R$  равна  $\frac{h}{2R} \cdot 4\pi R^2$ .

0. Монах с 8 часов утра до 8 часов вечера поднимался на священную гору. Ночь он провел в молитвах, а на следующий день спускался с горы с 8 утра до 8 вечера по той же дороге. Скорость его оба раза вовсе не была постоянной, иногда он отдыхал, мог и возвращаться за забытой на предыдущем привале вещью. Докажите, что в каком-то месте дороги он в первый и во второй день был ровно в одно и то же время.
1. На плоскости расположены многоугольник площади 1 и 1000 точек. Докажите, что многоугольник можно сдвинуть на вектор, модуль которого не превосходит  $\sqrt{\frac{1000}{\pi}}$ , так, чтобы сдвинутый многоугольник не содержал ни одну из точек внутри себя.
2. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдётся кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.
3. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что машины (точки), соединенные веревкой длины меньше 2, смогли проехать из  $A$  в  $B$ , не разорвав веревки. Смогут ли разъехаться круглые возы радиуса 1, если они идут на встречу друг другу по разным дорогам?
4. (а) Двое флатландцев спускаются с высочайшей горы Флатландии — один по левому склону, а второй по правому. Гора везде выше уровня моря, а её поверхность — график кусочно-линейной непрерывной функции. Докажите, что флатландцы могут достичь моря, всё время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря.  
(б) Докажите, что если есть несколько гор равной высоты, и по склону каждой горы спускается флатландец, то они смогут спуститься, оставаясь все на одной и той же высоте.
5. В пространстве нарисовано  $n$  прямых. Докажите, что можно выбрать из них не менее  $\frac{2-\sqrt{2}}{2}n$ , попарно не перпендикулярных друг другу.
6. В пироге радиуса  $R$  запекли монетку радиуса  $r < R$ . За какое минимальное число прямыхлинейных разрезов можно гарантированно задеть ножом монетку? Если разрез касается монетки, то она считается задетой.
7. Отрезком на сфере назовем любую дугу любой окружности, полученной как сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. На сфере радиуса 1 нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная длиной меньше  $2\pi$ . Докажите, что существует полусфера, полностью содержащая ломаную.
8. В гонке по пересечённой местности участвуют 8 машин. Трасса представляет собой прямую дорогу, на которой есть несколько заболоченных участков. Каждая машина движется по сухим участкам дороги с постоянной скоростью (каждая со своей), а по заболоченным участкам — с другой постоянной скоростью (также каждая со своей). Машины стартуют из одной точки, но в разное время, временные промежутки между стартами могут различаться. На дистанции дежурят 500 судей. Каждый судья отметил, в каком порядке мимо него проехали машины, напротив судьи обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух судей машины проехали в одинаковом порядке.