Кривые второго порядка

0. (*Оптическое свойство эллипса*) Касательная, проведённая в любой точке эллипса, является внешней биссектрисой угла, образованного лучами, выходящими из этой точки и проходящими через фокуса этого эллипса.

1. Сформулируйте и докажите аналогичные свойства для a) параболы и b) гиперболы.

2. Касательные в точках A и B эллипса с фокусами F_1 и F_2 к этому эллипсу пересекаются в точке P. Докажите, что F_1P — биссектриса угла AF_1B.

3. Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и точка X вне этого эллипса. Из неё проведены касательные XP и XQ к этому эллипсу. Докажите, что $\angle PXF_1 = \angle QXF_2$.

4. Пусть XY — хорда эллипса, проходящая через его фокус F_1. Касательные в точках X и Y пересекаются в точке I. Докажите, что $IF_1 \perp XY$.

5. Будем говорить, что эллипс *виден из некоторой точки под прямым углом*, если угол между касательными, проведёнными из этой точки к этому эллипсу, прямой. Докажите, что ГМТ, из которых данный эллипс виден под прямым углом, есть окружность.

6. Докажите, что геометрическое место проекций фокуса параболы на её касательные есть прямая, касающаяся этой параболы в её вершине.

7. Докажите, что множество таких точек P, из которых парабола видна под прямым углом, есть директриса этой параболы. Кроме того, если PX и PY — касательные к этой параболе, то XY содержит её фокус F, а PF является высотой треугольника PXY.

8. Докажите, что ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на её директрисе.

9. Дан треугольник ABC. Параболе с фокусом в точке A и директрисой BC пересекает его стороны AB и AC в точках A_B и A_C соответственно. Касательные к этой параболе, проведённые в точках A_B и A_C, пересекаются в точке A'. Аналогично определены точки B' и C'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

10. a) Из фокуса F эллипса α опущены перпендикуляры FH на всевозможные касательные к α. Докажите, что ГМТ H есть окружность. b) Для касательной l к α выберем на ней точку M такую, что $\angle(l, MF) = \beta = \text{const}$. Докажите, что ГМТ M по всем возможным касательным l есть окружность. Покажите, что для некоторого значения β_0 если $\beta < \beta_0$, то эта окружность касается эллипса в двух точках, если $\beta = \beta_0$, то касается в одной точке, а если $\beta > \beta_0$, то не касается. Чему равно β_0?

11. Назовём *эллипсоидом вращения* поверхность, получающуюся вращением эллипса относительно его большей оси. *Фокусами* эллипсоида вращения называются фокусы исходного эллипса. Докажите, что пересечение двух эллипсоидов вращения с общим фокусом лежит в одной плоскости.