1. Пусть $N = k^{2021} + 1$ при некотором натуральном $k > 10^6$. На доске в указанном порядке в ряд выписаны числа N, $N - k$, $N - 2k$, . . . , $k + 1$, 1. За один шаг с доски стирается самое левое из оставшихся чисел вместе со всеми своими делителями (если такие есть). Эту операцию проделали несколько раз, пока на доске не осталось ни одного числа. Какие числа были стёрты на последнем шаге?

2. По кругу в каком-то порядке через равные промежутки стоят фишки 2021 различных цветов, каждый цвет встречается ровно дважды. Разрешается поменять местами две соседние фишки, если каждая из них при этой перестановке приблизится к другой фишке своего цвета. Какого наибольшего числа одноцветных пар соседей можно гарантированно добиться такими операциями из любого начального расположения?

3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром в точке O_c касается отрезков AH и BH, а также окружности с диаметром AB. Точки O_a и O_b определяются аналогично. Докажите, что прямые AO_a, BO_b и CO_c пересекаются в одной точке.

4. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Вневписанная окружность касается отрезка AC в точке K. Пусть W — вторая точка пересечения BI и описанной окружности треугольника ABC, а P — точка, симметричная I относительно высоты, опущенной из вершины B. Известно, что $\angle IKW = 90°$. Найдите угол $\angle BPK$.

5. Триангуляцией выпуклого многоугольника называется разбиение его на треугольники непересекающимися диагоналями. *Антикликой* в данной триангуляции назовём подмножество вершин многоугольника, никакие две из которых не являются вершинами одного и того же треугольника из триангуляции. Саша подсчитал, что в любой триангуляции данного выпуклого 100-угольника хотя бы M антиклик, причем есть триангуляции, в которых их ровно M. Сколько триангуляций содержат ровно M антиклик?

6. Дано вещественное число α. Миша и Маша называют пару вещественных чисел x и y *близкой*, если

$$\frac{xy}{x+y+1} + x^2 + y^2 = \alpha.$$

Миша загадал 6 попарно различных вещественных чисел и сообщил Маше, что ровно 5 из 15 пар этих чисел близкие. Докажите, что Маша может отгадать хотя бы одно из чисел, загаданных Мишей.

11-1 По мотивам Колма 25 ноября 2021

1. Пусть $N = k^{2021} + 1$ при некотором натуральном $k > 10^6$. На доске в указанном порядке в ряд выписаны числа N, $N - k$, $N - 2k$, . . . , $k + 1$, 1. За один шаг с доски стирается самое левое из оставшихся чисел вместе со всеми своими делителями (если такие есть). Эту операцию проделали несколько раз, пока на доске не осталось ни одного числа. Какие числа были стёрты на последнем шаге?

2. По кругу в каком-то порядке через равные промежутки стоят фишки 2021 различных цветов, каждый цвет встречается ровно дважды. Разрешается поменять местами две соседние фишки, если каждая из них при этой перестановке приблизится к другой фишке своего цвета. Какого наибольшего числа одноцветных пар соседей можно гарантированно добиться такими операциями из любого начального расположения?

3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром в точке O_c касается отрезков AH и BH, а также окружности с диаметром AB. Точки O_a и O_b определяются аналогично. Докажите, что прямые AO_a, BO_b и CO_c пересекаются в одной точке.

4. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Вневписанная окружность касается отрезка AC в точке K. Пусть W — вторая точка пересечения BI и описанной окружности треугольника ABC, а P — точка, симметричная I относительно высоты, опущенной из вершины B. Известно, что $\angle IKW = 90°$. Найдите угол $\angle BPK$.

5. Триангуляцией выпуклого многоугольника называется разбиение его на треугольники непересекающимися диагоналями. *Антикликой* в данной триангуляции назовём подмножество вершин многоугольника, никакие две из которых не являются вершинами одного и того же треугольника из триангуляции. Саша подсчитал, что в любой триангуляции данного выпуклого 100-угольника хотя бы M антиклик, причем есть триангуляции, в которых их ровно M. Сколько триангуляций содержат ровно M антиклик?

6. Дано вещественное число α. Миша и Маша называют пару вещественных чисел x и y *близкой*, если

$$\frac{xy}{x+y+1} + x^2 + y^2 = \alpha.$$

Миша загадал 6 попарно различных вещественных чисел и сообщил Маше, что ровно 5 из 15 пар этих чисел близкие. Докажите, что Маша может отгадать хотя бы одно из чисел, загаданных Мишей.