

1. Докажите, что существует бесконечно много точных квадратов с десятичной записью вида  $\overline{NN}$ .

2. Найдите все натуральные  $a$  и  $b$  такие, что  $a^2 + b : b^2 + a$ , причём число  $b^2 + a$  является степенью некоторого простого числа.

3. Найдите все натуральные  $k$  такие, что  $5^k - 1$  является произведением чётного количества последовательных натуральных чисел.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде  $\frac{k(k+1)}{2} - 2^n$ , где  $k$  и  $n$  — целые неотрицательные числа.

5. Дано натуральное  $m > 1$ ,  $A = \{m + 1, 3m + 2, 5m + 3, 7m + 4, \dots\}$ . Докажите, что существует натуральное  $a < m$  такое, что хотя бы одно из чисел  $2^a$ ,  $2^a + 1$  лежит в множестве  $A$ .

6. Пусть  $A$  — бесконечное подмножество натуральных чисел. Найдите все натуральные  $n$  такие, что для всех  $a \in A$  справедливо

$$a^{n!} + a^{(n-1)!} + \dots + a^{1!} + 1 : a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1.$$

7. Докажите, что число  $3^{4^5} + 4^{5^6}$  представимо в виде произведения двух натуральных чисел, больших  $10^{1000}$ .

8. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots$ . Натуральное  $N > 1$  таково, что число  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$  — целое при всех  $n \geq N$ . Докажите, что эта последовательность стабилизируется (т.е. найдётся натуральное  $M$  такое, что  $a_m = a_{m+1}$  при всех  $m \geq M$ ).