11-1 Разнобой 8 ноября 2021

1. Произведение 2021 натурального числа имеет ровно 2020 различных простых делителей. Докажите, что произведение нескольких из этих чисел (возможно, одного) является точным квадратом.

2. Изначально на доске написано натуральное число, большее 1. Каждую минуту число n на доске заменяется на $n+\frac{n}{p}$, где p — некоторый простой делитель n. Докажите, что 3 будет выбрано в качестве p бесконечно много раз.

3. Пусть S — некоторое множество последовательностей из 0 и 1 длины 100 (множество *запретов*). Будем говорить, что последовательность A из 0 и 1 *удовлетворяет* системе запретов S, если A не содержит никакую последовательность из S в качестве подстроки. Оказалось, что все удовлетворяющие S последовательности конечны, и n — длина максимальной из них. Какое наибольшее значение может принимать n?

4. У Вани есть 200 палочек, длина каждой из которых меньше 10^6. Оказалось, что из любых трёх из этих палочек можно составить треугольник. Докажите, что Ваня может составить из некоторых из этих палочек выпуклый многоугольник, площадь которого меньше 10^{-6}.

5. В неравностороннем треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка O — центр описанной окружности. Прямая s проходит через I и перпендикулярна прямой OI. Прямая ℓ, симметричная прямой BC относительно s, пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно (K и L отличны от A). Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на прямой OI.

6. Найдите все функции $f:[0;+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ такие, что

- $f(x+f(x)+2y)=f(2x)+2f(y)$ для всех неотрицательных x,y;
- уравнение $f(x)=0$ имеет конечное (возможно, нулевое) количество решений.