11-1 Теорема Форда-Фалкерсона 28 октября 2021

Определение. Пусть задано множество вершин V, среди которых выделено две: *вход* s и *выход* t. Пусть задана функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

$$c(x, y) \geqslant 0, \quad c(x, s) = 0, \quad c(t, y) = 0.$$

Тогда четверка $G = (V, s, t, c)$ называется *сетью*, а функция c — *пропускной способностью* этой сети.

Определение. Если функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

1. $f(x, y) \leqslant c(x, y)$,
2. $f(x, y) = -f(y, x)$,
3. если $x \neq s$ и $x \neq t$, то $\sum_{y \in V} f(x, y) = 0$,

то f называется *потоком* в сети G. Значение $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$ называется *величиной потока*. Поток называется *максимальным*, если его величина максимальна.

Определение. Пусть множество V разбито на две части S и T, причем $s \in S$, $t \in T$. Тогда пару (S, T) будем называть *разрезом* сети G. *Потоком через разрез* (S, T) будем называть величину $f(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y)$. *Пропускной способностью разреза* (S, T) — величину $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$. Разрез называется *минимальным*, если его пропускная способность минимальна.

Определение. Для потока f в сети G определим *остаточную сеть* G_f с теми же множеством вершин, входом и выходом, пропускная способность которой задана следующим образом $c_f(x, y) = c(x, y) - f(x, y)$.

Определение. Проведем на множестве вершин V ориентированные ребра из x в y для всех пар (x, y) таких, что $c_f(x, y) > 0$. Любой путь из s в t в полученном ориентированном графе называется *дополняющим путем* потока f.

1. Докажите, что для любого потока f и разреза (S, T) выполнено $|f| = f(S, T)$.

2. Теорема Форда-Фалкерсона. Пусть в сети G с пропускной способностью c задан поток f. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Поток f — максимальный.
2. В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.
3. Существует разрез (S, T) такой, что $f(S, T) = c(S, T)$.

3. Пусть пропускная способность каждого ребра — целое число. Докажите, что в сети есть максимальный целочисленный поток (т.е. поток через каждое ребро — целый).

В следующих задачах разрешено пользоваться задачами 1-3.

4. В таблице $m \times n$ в каждой клетке записано некоторое число так, что сумма чисел в каждом столбце и сумма чисел в каждой строке является целым числом. Докажите, что каждое число можно округлить до какого-то целого (изменив менее чем на 1) так, чтобы сумма в каждом столбце и сумма в каждой строке не изменилась.

Докажите следующие теоремы, используя теорему Форда-Фалкерсона.

5. Теорема Холла. Пусть в двудольном графе $G = (L, R, E)$ для любого k и k-элементного подмножества $L_0 \subset L$ количество вершин из R, смежных хотя бы с одной из вершин множества L_0, не меньше k. Тогда в графе есть паросочетание, содержащее все вершины из L.

6. Теорема Кёнига. Пусть в двудольном графе G любое паросочетание имеет размер не более k. Тогда можно выбрать k вершин таких, что любое ребро графа имеет конец среди выбранных вершин.

7. Теорема Менгера. Даны граф G и две его вершины u и v.

(a) Пусть u и v остаются в одной компоненте связности при выкидывании любых $(n - 1)$ ребер. Тогда существуют n реберно непересекающихся путей из u в v.

(b) Пусть u и v остаются в одной компоненте связности при выкидывании любых $(n - 1)$ вершин. Тогда существуют n вершинно непересекающихся путей из u в v (путей, у любых двух из которых общими вершинами являются только u и v).

8. Теорема Дилуорса. Пусть на множестве S задан *частичный порядок*, т.е для некоторых пар (x, y) известно, что $x \succ y$, причем нет пары (x, y) такой, что $x \succ y$ и $y \succ x$; также из условий $x \succ y$ и $y \succ z$ следует, что $x \succ z$. *Цепью* назовем подмножество, в котором любые два элемента сравнимы, а *антицепью* — подмножество, в котором любые два не сравнимы. Пусть в множестве S нет антицепи размера больше k. Тогда S разбивается на k непересекающихся цепей.