11-1	Геометрический разнобой	21 октября 2021

1. Внутри остроугольного неравнобедренного треугольника ABC отмечена точка T такая, что $\angle ATB = \angle BTC = 120^\circ$. Окружность с центром E проходит через середины сторон треугольника ABC. Оказалось, что точки B, T, E лежат на одной прямой. Найдите $\angle ABC$.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон BC, CA, AB в точках X, Y, Z соответственно. На плоскости дана точка K. Серединные перпендикуляры к отрезкам KX, KY, KZ пересекают прямые BC, CA, AB в точках X_1, Y_1, Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1, Y_1, Z_1 лежат на одной прямой.

3. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Точки M и N на сторонах AB и AC соответственно таковы, что $\angle BAC = \angle MON$. Докажите, что $AM + MN + NA \geqslant BC$.

4. Пусть AD, BE и CF — высоты остроугольного треугольника ABC. Окружности ω_B и ω_C вписаны в треугольники BDF и CDE соответственно; эти окружности касаются отрезков DF и DE в точках M и N соответственно. Прямая MN пересекает вторично окружности ω_B и ω_C в точках P и Q соответственно. Докажите, что $MP = NQ$.

5. Трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ вписана в окружность ω. Точки M и N — середины дуг BC и AD соответственно (не содержащих отмеченных точек). Пусть P — точка касания вписанной окружности треугольника ABD со стороной AD, а Q — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Докажите, что прямые MQ и NP пересекаются на ω.

6. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, M — середина стороны BC. Пусть точки I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

7. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Пусть P — точка на меньшей дуге DE окружности такая, что $\angle APE = \angle DPB$. Отрезки AP и BP пересекают отрезок DE в точках K и L соответственно. Докажите, что $DE = 2KL$.