11-1 # Всё сложится 18 октября 2021

Один из основных способов нахождения суммы ряда — *телескопирование.* Его идея в том, чтобы в сумме $a_1 + a_2 + \ldots$ каждое слагаемое a_i представить разностью $(b_{i+1} - b_i)$ для некоторой последовательности $\{b_j\}$.

1. Найдите сумму

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(3^n x)}{3^n}$; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n F_{n+2}}$ (где F_i — числа Фибоначчи);

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}}$ (где F_i — числа Фибоначчи); **ё)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ (где a_i — количество цифр в числе 2^i, больших 4).

Другой способ нахождения суммы ряда — знание разложения в ряд классических функций: $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x, \ldots$ (для этого полезно знать, что такое ряд Тейлора). Также иногда помогает идея дифференцирования.

2. Найдите сумму

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$ (где $x \neq 2\pi s, s \in \mathbb{Z}$) ; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$; **ё)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Иногда надо просто ограничить сумму ряда. Для этого порой достаточно каждое слагаемое оценить слагаемым другого сходящегося ряда. А порой оказывается полезен интеграл.

3. Докажите, что **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$;

в) $2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 100$ (где a_i — i-е по счёту натуральное число без единиц в десятичной записи);

д) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{2^k - 1} < 2$ (где $\varphi(s)$ — функция Эйлера).