11-1	# Уравнения Пелля — 2	11 октября 2021

1. Дано целое $n \neq 0$ и кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$. Пусть число $x = a + b\sqrt{m}$ — наименьшее число нормы 1 с натуральными коэффициентами a и b. Докажите, что найдётся конечное (возможно, пустое) множество $y_1, y_2, \ldots, y_s$ чисел нормы n такое, что все числа нормы n с натуральными коэффициентами имеют вид $y_i x^k$, где $k \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

2. Решите в целых числах уравнение
а) $x^2 - 6xy + y^2 = 1$;
б) $a^2 - 3b^2 = 13$.

3. Через $l(n)$ обозначим количество простых чисел в разложении числа n. Например, $l(12) = 3$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что **а)** $l(n)$ и $l(n+1)$ чётны; **б)** $l(n)$ и $l(n+1)$ нечётны.

4. Найдите все натуральные $k < n$ такие, что $C_n^{k-1} = 2C_n^k + C_n^{k+1}$.

5. Назовём *белыми* числа вида $\sqrt{a + b\sqrt{2}}$ с целыми ненулевыми a и b, а *чёрными* — числа вида $\sqrt{c + d\sqrt{7}}$ с целыми ненулевыми c и d. Докажите, что существует бесконечно много чёрных чисел, представимых в виде суммы нескольких белых.

6. **а)** Пусть p — простое число, $p \equiv 1 \pmod 4$. Докажите, что уравнение $x^2 - py^2 = -1$ имеет решения в натуральных числах.

б) Пусть p — простое число, $p \equiv 3 \pmod 4$. Докажите, что ровно одно из уравнений $x^2 - py^2 = \pm 2$ имеет решения в натуральных числах.

7. **а)** Пусть $P(n)$ — наибольший простой делитель числа $n^2 + 1$. Докажите, что существует бесконечно много троек натуральных a, b, c таких, что $P(a) = P(b) = P(c)$.

б) Докажите, что для любого натурального N найдутся натуральные $a > b > N$ такие, что у чисел $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ наборы простых делителей совпадают.

8. При каких n число $3^n - 2$ является точным квадратом?

9. Докажите, что существует бесконечно много четвёрок натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них, увеличенное на 1, является точным квадратом.