11-1 **Линейная комбинаторика** 7 октября 2021

1. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось хотя бы $(n+m-1)$ чисел.

2. Есть несколько лампочек и несколько кнопок. Каждая кнопка подсоединена к некоторому набору лампочек и при нажатии на неё состояние лампочек из этого набора меняется на противоположное. Подмножество лампочек назовём *инвариантным*, если каждая кнопка меняет состояния чётного числа лампочек этого подмножества. Докажите, что из одного состояния лампочек можно получить другое тогда и только тогда, когда у обоих состояний чётность числа включенных лампочек во всех инвариантных подмножествах совпадает.

3. В клетчатом квадрате $n \times n$ (где $n > 1$) по линиям сетки (внутри квадрата или на его границе) проведены несколько контуров, каждый из которых ограничивает некоторый прямоугольник. Может ли оказаться, что через любую сторону любой клетки будет проходить нечётное число таких контуров?

4. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.

5. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может приписать положительные веса тестовым вопросам так, чтобы участники по первичным баллам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.

6. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2022 -элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было чётное число элементов, причём в пересечении любых двух подмножеств тоже было чётное число элементов?

7. Прямоугольник разрезан на квадраты. Докажите,что отношение сторон этого прямоугольника рационально.

8. В полном графе на n вершинах выделили k полных подграфов на меньшем числе вершин. Оказалось, что каждое ребро исходного графа принадлежит ровно одному такому подграфу. Докажите, что $k \geqslant n$.

11-1 Линейная комбинаторика 7 октября 2021

1. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось хотя бы $(n+m-1)$ чисел.

2. Есть несколько лампочек и несколько кнопок. Каждая кнопка подсоединена к некоторому набору лампочек и при нажатии на неё состояние лампочек из этого набора меняется на противоположное. Подмножество лампочек назовём *инвариантным*, если каждая кнопка меняет состояния чётного числа лампочек этого подмножества. Докажите, что из одного состояния лампочек можно получить другое тогда и только тогда, когда у обоих состояний чётность числа включенных лампочек во всех инвариантных подмножествах совпадает.

3. В клетчатом квадрате $n \times n$ (где $n > 1$) по линиям сетки (внутри квадрата или на его границе) проведены несколько контуров, каждый из которых ограничивает некоторый прямоугольник. Может ли оказаться, что через любую сторону любой клетки будет проходить нечётное число таких контуров?

4. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.

5. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может приписать положительные веса тестовым вопросам так, чтобы участники по первичным баллам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.

6. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2022 -элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было чётное число элементов, причём в пересечении любых двух подмножеств тоже было чётное число элементов?

7. Прямоугольник разрезан на квадраты. Докажите,что отношение сторон этого прямоугольника рационально.

8. В полном графе на n вершинах выделили k полных подграфов на меньшем числе вершин. Оказалось, что каждое ребро исходного графа принадлежит ровно одному такому подграфу. Докажите, что $k \geqslant n$.