11-1 **Уравнения Пелля** 4 октября 2021

Определение 1. Уравнение в целых числах вида $x^2 - my^2 = 1$, где m — натуральное число, не являющееся точным квадратом, называется *уравнением Пелля*. Его решение (x_0, y_0) называется *нетривиальным*, если $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$. Нетривиальное решение уравнения Пелля (x_0, y_0) называется *минимальным*, если $x_0, y_0 > 0$ и $x_0 + y_0$ минимально среди всех положительных решений уравнения Пелля.

Определение 2. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, состоящее из всех чисел вида $x + y\sqrt{m}$, где x, y — целые, m — натуральное. Для каждого числа определим *норму* $N(x + y\sqrt{m}) = x^2 - my^2$. Будем говорить, что $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ *делится на* $b \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ (или $a \,\vdots\, b$), если существует $c \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ такое, что $a = bc$.

Замечание. Решить уравнение Пелля $\Leftrightarrow$ найти все числа с нормой 1 в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.

Упражнение. Докажите, что норма в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ мультипликативна, т.е. для любых $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ верно $N(ab) = N(a) \cdot N(b)$.

1. а) Пусть $x_1 + y_1\sqrt{m}$ и $x_2 + y_2\sqrt{m}$ принадлежат $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, $n = N(x_2 + y_2\sqrt{m})$. Докажите, что если $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$, то $x_1 + y_1\sqrt{m} \,\vdots\, x_2 + y_2\sqrt{m}$.

б) Докажите, что если у уравнения $x^2 - my^2 = n$ более n^2 решений в целых неотрицательных числах, то найдётся нетривиальное решение уравнения $x^2 - my^2 = 1$.

2. Пусть (a, b) — минимальное решение уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$. Определим $f(x, y) = (ax + mby, ay + bx)$. (Откуда это? Из произведения $a + b\sqrt{m}$ и $x + y\sqrt{m}$.)

а) Докажите, что если (x_0, y_0) — решение уравнения Пелля, то $f(x_0, y_0)$ — тоже решение уравнения Пелля.

б) Исходя из решения $(1, 0)$, можно получить бесконечную последовательность решений (x_i, y_i) по формуле $(x_i, y_i) = f(x_{i-1}, y_{i-1})$. Доказав, что других положительных решений уравнения Пелля не существует, найдите явную формулу всех решений уравнения Пелля (через a, b, m и натуральное n).

3. а) Докажите, что для любого α какое-то из чисел $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$ отличается от целого не более чем на $\frac{1}{n+1}$.

б) Теорема Дирихле. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных p и q таких, что $|\frac{p}{q} - \sqrt{m}| < \frac{1}{q^2}$.

в) Докажите, что для какого-то c существует бесконечно много чисел в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, модуль нормы которых меньше c.

г) Докажите, что любое уравнение Пелля имеет нетривиальное решение.

4. Рассмотрим гиперболы с уравнениями $x^2 - my^2 = N$ и $x^2 - my^2 = -N$.

а) Выберем две точки с координатами $(x_0; y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ на первой гиперболе и две точки с координатами $(\sqrt{m}y_0; \frac{x_0}{\sqrt{m}})$, $(-\sqrt{m}y_0; -\frac{x_0}{\sqrt{m}})$ на второй. Найдите площадь параллелограмма с вершинами в этих точках. Зависит ли она от x_0 и y_0?

б) Вспомнив лемму Минковского, докажите, что для какого-то N на гиперболе $x^2 - my^2 = N$ найдётся бесконечно много целых точек.

в) Докажите, что любое уравнение Пелля имеет нетривиальное решение.

Замечание. Подобрать минимальное нетривиальное решение уравнения Пелля не всегда легко. Например, при $m = 61$ им является пара $(1766319049, 226153980)$.