11-1 Линейные пространства 30 сентября 2021

Определение. Пусть даны множества «векторов» V и поле «чисел» $\mathbb{K}$, при этом есть операции сложения векторов и умножения векторов на число, удовлетворяющие следующим свойствам:

• Сложение векторов коммутативно, ассоциативно, также в множестве есть нейтральный элемент (нулевой вектор), и у каждого вектора $\overrightarrow{v}$ есть противоположный по сложению вектор $-\overrightarrow{v}$;

• Ассоциативность умножения, унитарность: $k_1(k_2\overrightarrow{v}) = (k_1k_2)\overrightarrow{v}$, $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$;

• Обе дистрибутивности: $(k_1 + k_2)\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v} + k_2\overrightarrow{v}, k(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = k\overrightarrow{v_1} + k\overrightarrow{v_2}$.

Тогда V называется *линейным (векторным) пространством* над полем $\mathbb{K}$.

1. Какие из следующих множеств являются линейными пространствами относительно естественных операций? (Дайте последовательность ответов «да» или «нет».)
a) $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$.
b) $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{R}$.
c) Ограниченные бесконечные последовательности рациональных чисел над полем $\mathbb{Q}$.
d) Бесконечные периодические последовательности остатков по простому модулю p над полем $\mathbb{Z}_p$.
e) Многочлены степени ровно 100 с комплексными коэффициентами над полем $\mathbb{C}$.
f) Множество рациональных решений однородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{Q}$.
g) Бесконечные последовательности F_n вещественных чисел, удовлетворяющие рекуррентному соотношению $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ над полем $\mathbb{R}$.

Определения. Дано линейное пространство V над полем $\mathbb{K}$. Назовём множество векторов E *линейно независимым*, если не существует $e_1, \ldots, e_n \in E$ и ненулевых $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{K}$ таких, что $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n = 0$.

Множество векторов $E \subset V$ назовём *порождающим*, если для любого вектора $v \in V$ существуют $e_1, e_2 \ldots e_n \in E$ и $a_1, a_2 \ldots a_n \in \mathbb{K}$ такие, что $v = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$.

Порождающее и линейно независимое множество будем называть *базисом* линейного пространства V.

Назовём множество $U \subset V$ *подпространством* линейного пространства V, если оно само по себе является линейным пространством над тем же полем.

Назовём линейное пространство *конечномерным*, если любое бесконечное множество векторов является линейно зависимым.

2. a) Основная лемма о линейной зависимости. Даны натуральные числа $m > n$. Через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ выражены векторы $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Докажите, что они линейно зависимы.
b) Докажите, что если у линейного пространства есть базис из n векторов, то любой его базис содержит ровно n векторов.

3. Докажите, что любое линейно независимое множество конечномерного пространства можно дополнить до базиса.

4. Есть n не горящих лампочек и k выключателей. Каждый выключатель соединён с некоторыми лампочками. При нажатии выключателя все соединённые с ним лампочки меняют своё состояние (если горели, то гаснут, а если не горели, то загораются).
a) Докажите, что если $k < n$, то для любого соединения лампочек с выключателями найдётся комбинация горящих лампочек, которую невозможно получить.
b) Докажите, что если $k > n$, то для любого соединения можно нажать на некоторые выключатели так, чтобы ни одна лампочка в итоге не загорелась.

5. Петя вписал числа в клетки квадрата 3×3 так, что получился магический квадрат. Числа в каком наименьшем количестве клеток должен узнать Вася, чтобы восстановить весь квадрат?

6. Имеется $n + 1$ непустых подмножеств n-элементного множества. Докажите, что несколько из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпало с объединением синих.

7. Сколькими способами можно соединить n лампочек и n выключателей так, чтобы любая комбинация горящих лампочек была реализуема?

8. В университете проводится n лекций, их посещают m студентов. Каждый студент посетил нечётное число лекций, а любые два студента вместе побывали на чётном числе лекций. Докажите, что $n \geqslant m$.

9. Докажите, что у пространства бесконечных последовательностей над полем $\mathbb{K}$ нет счётного базиса.