11-1	Международный разнобой	27 сентября 2021

1. Пусть n и k — фиксированные натуральные числа, a — целое неотрицательное число. Выберем случайно k-элементное подмножество X множества $\{1, 2, \ldots, k+a\}$ равномерно (любое k-элементное подмножество будет выбрано с одинаковой вероятностью), а также независимо от X выберем случайное n-элементное подмножество Y множества $\{1, 2, \ldots, k+n+a\}$ равномерно. Докажите, что вероятность $P(\min(Y) > \max(X))$ не зависит от a.

2. Дано натуральное число $n \geqslant 100$. Каждое из чисел $n, n+1, \ldots, 2n$ раскрашено либо в красный цвет, либо в синий. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, сумма которых — точный квадрат.

3. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Пусть Ω — описанная окружность треугольника AIC. Продолжение отрезка BA за точку A пересекает Ω в точке X, продолжение отрезка BC за точку C пересекает Ω в точке Z. Продолжения отрезков AD и CD за точку D пересекают Ω в точках Y и T соответственно. Докажите, что

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

4. Множество натуральных чисел разбито на n непересекающихся арифметических прогрессий $S_1, S_2, \ldots, S_n$ с разностями $d_1, d_2, \ldots, d_n$ соответственно. Докажите, что существует ровно один индекс $1 \leqslant i \leqslant n$ такой, что

$$\frac{1}{d_i} \prod_{j=1}^{n} d_j \in S_i.$$

5. По кругу выписали числа $1, 2, \ldots, 2021$ в некотором порядке. Дальше последовательно применяется 2021 операция. На каждой k-й операции меняются местами два числа, соседние с числом k. Докажите, что существует число n такое, что во время n-й операции поменялись местами числа a и b такие, что $a < n < b$.

6. Для любых действительных $x_1, \ldots, x_n$ докажите, что

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

7. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC нашлись точки D, E, F соответственно такие, что четырёхугольники $AFDE$, $BDEF$, $CEFD$ — описанные. Докажите, что у треугольников ABC и DEF радиусы вписанных окружностей отличаются в два раза.