11-1 Системы линейных уравнений 23 сентября 2021

Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n} & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & & & & \dots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Две СЛУ от переменных $x_1, \dots, x_n$ назовём *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.
Рассмотрим следующие *элементарные преобразования:*
ЭП1 поменять местами две строки;
ЭП2 умножить строку на ненулевое число;
ЭП3 прибавить к строке другую строку, умноженную на число.

Утверждение. Если одна система линейных уравнений получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти системы эквивалентны.

1. Метод Гаусса. Докажите, что при помощи ЭП1-ЭП3 каждую систему линейных уравнений можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\begin{cases} b_{1k}x_k & + & \dots & \dots & \dots & + & b_{1n}x_n & = & d_1, \\ & b_{2l}x_l & + & \dots & \dots & + & b_{2n}x_n & = & d_2, \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & b_{rs}x_s & + & \dots & + & b_{rn}x_n & = & d_r, \\ & & & & & & 0 & = & d_{r+1}, \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 0 & = & d_m. \end{cases}$$

где $b_{1k}, b_{2l}, \dots, b_{rs} \neq 0, k < l < \dots < s$.

2. Как найти все решения системы линейных уравнений? Сколько их вообще может быть?

Определение. Система линейных уравнений называется *однородной*, если все её правые части равны 0.

Определение. Систему линейных уравнений, у которой уравнений столько же, сколько неизвестных, будем называть *квадратной*.

3. a) Докажите, что если в однородной системе неизвестных больше, чем уравнений, то у неё есть ненулевое решение.
b) Докажите, что если у квадратной однородной системы не одно решение, то одно из её уравнений следует из остальных, то есть множество его решений содержит пересечение множеств решений остальных.
c) В однородной системе уравнений на одно меньше, чем неизвестных. Докажите, что если не все решения пропорциональны, то одно из уравнений следует из остальных.

4. На плоскости даны 5 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует единственная кривая второго порядка (т.е. кривая, которая задаётся выражением $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, с точностью до умножения на константу), проходящая через них.

5. Пусть квадратная однородная система имеет только нулевое решение. Докажите, что любая система, получающаяся из данной заменой правой части, имеет единственное решение.

6. Имеется клетчатая таблица $(k + 2) \times (l + 2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

7. Докажите, что если все коэффициенты в системе линейных уравнений рациональны, и у системы есть хотя бы одно решение, то у неё есть и решение в рациональных числах.

8. Внутри отрезка $[0, 1]$ выбрали n различных точек. *Отмеченной точкой* назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных точках. Докажите, что все точки рациональны.

9. У лаборанта есть 101 гирька. Оказалось, что если отложить любую гирьку, то остальные можно разложить на две группы по 50 равной массы. Докажите, что массы всех гирь равны, если массы гирь
a) рациональные;
b) действительные.