

Графы

1. В королевстве между некоторыми городами открыты дороги с двусторонним движением так, что из любого города можно проехать по дорогам в любой другой. Проезд по дорогам платный, причём стоимость у всех дорог разная. Министр составил список всех возможных маршрутов по дорогам королевства, проходящих через каждый город ровно один раз. Король-реформатор отметил в каждом из этих маршрутов самую дорогую дорогу и приказал закрыть все дороги, которые были отмечены хотя бы один раз. После этого оказалось, что из города A нельзя проехать в город B , из города B — в город C , а из города C — в город A . Докажите, что приказ короля был выполнен неправильно.
2. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная длина маршрута (у каждой дороги есть некоторая длина), выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может проходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более, чем в полтора раза.
3. На шахматной доске расставили несколько ладей так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит не менее k штук. При каком наименьшем k можно гарантированно выбрать 8 ладей так, что в каждом столбце и в каждой строке будет стоять ровно одна из выбранных?
4. В некотором графе степень каждой вершины не превосходит 1000. Докажите, что рёбра графа можно так покрасить в 10 цветов, что не найдется нечётного одноцветного цикла.
5. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B , то и B дружит с A). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.
6. Назовём компанию k -неразбиваемой, если при любом разбиении её на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырёх попарно знакомых человек. Докажите, что её можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая — 1-неразбиваемая.
7. В городе Угрюмове 2 000 000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2 000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых.