

Графы

1. В королевстве между некоторыми городами открыты дороги с двусторонним движением так, что из любого города можно проехать по дорогам в любой другой. Проезд по дорогам платный, причём стоимость у всех дорог разная. Министр составил список всех возможных маршрутов по дорогам королевства, проходящих через каждый город ровно один раз. Король-реформатор отметил в каждом из этих маршрутов самую дорогую дорогу и приказал закрыть все дороги, которые были отмечены хотя бы один раз. После этого оказалось, что из города A нельзя проехать в город B , из города B — в город C , а из города C — в город A . Докажите, что приказ короля был выполнен неправильно.
2. На шахматной доске расставили несколько ладей так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит не менее k штук. При каком наименьшем k можно гарантированно выбрать 8 ладей так, что в каждом столбце и в каждой строке будет стоять ровно одна из выбранных?
3. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B , то и B дружит с A). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.
4. Назовём компанию k -неразбиваемой, если при любом разбиении её на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырёх попарно знакомых человек. Докажите, что её можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая — 1-неразбиваемая.
5. В городе Угрюмове 2 000 000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2 000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых.
6. На каждой из 2022 карточек написано по числу, все эти 2022 числа различны. Карточки перевёрнуты числами вниз. За один ход разрешается указать на десять карточек, и в ответ сообщат одно из чисел, написанных на них (неизвестно, какое). Для какого наибольшего t гарантированно удастся найти t карточек, про которые известно, какое число написано на каждой из них?
7. Имеется $4n$ камушков массаи 1, 2, 3, ..., $4n$. Каждый из камушков покрашен в один из n цветов, причём имеется по 4 камушка каждого цвета. Докажите, что камушки можно разделить на две кучи равного суммарного веса так, чтобы в каждой куче было по два камушка каждого цвета.