Теорема Морлея

Теорема Морлея. Точки пересечения смежных трисектрис углов (т. е. лучей, делящих данный угол на 3 равные части) произвольного треугольника являются вершинами равностороннего треугольника.

1. **(а)** Внутри треугольника ABC нашлась точка I такая, что $\angle CIB = 90^\circ + \angle CAI$, а $\angle CIA = 90^\circ + \angle CBI$. Докажите, что AI, BI и CI являются биссектрисами углов данного треугольника.

   (б) На сторонах IA_1 и IB_1 равностороннего треугольника A_1IB_1 построили внешним образом треугольники A_1IA и B_1IB таким образом, что $\angle B_1IB = 60^\circ + \angle A_1AI$, а $\angle A_1IA = 60^\circ + \angle B_1BI$. Лучи AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C. Докажите, что AI, BI и CI являются биссектрисами углов треугольника ABC.

   (в) Докажите теорему Морлея.

2. Пусть C_1 — точка пересечения трисектрис углов A и B, образующих со стороной AB меньший угол. Аналогично определяются точки A_1 и B_1.

   (а) Докажите, что для произвольного угла φ верно тождество

   $$\sin 3\varphi = 4\sin\varphi\sin(60^\circ+\varphi)\sin(60^\circ-\varphi).$$

   (б) Пусть $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma$, R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что

   $$AB_1 = \frac{2R\sin 3\beta\sin\gamma}{\sin(60^\circ-\beta)} = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ+\beta).$$

   (в) В треугольнике AB_1C_1 с углом $\angle B_1AC_1 = \alpha$ вычислите отношение сторон $AB_1 : AC_1$. Докажите, что два других его угла равны $60^\circ+\beta$ и $60^\circ+\gamma$, а также что $B_1C_1 = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, ну и выведите отсюда теорему Морлея.