# Делители

1. Докажите, что для любого натурального $n > 2$ число $n!$ можно представить в виде суммы $n$ различных делителей числа $n!$.

2. Обозначим через $d(k)$ количество натуральных делителей числа $k$. Например, $d(6) = 4$, так как число 6 имеет 4 натуральных делителя: $1, 2, 3$ и 6. Докажите, что для любого натурального $n$ выполнено

$$d(1) + d(3) + d(5) + \ldots + d(2n-1) \leqslant d(2) + d(4) + d(6) + \ldots + d(2n).$$

3. 2022 натуральных числа имеют в совокупности 2021 простой делитель. Докажите, что можно выбрать несколько чисел так, чтобы их произведение было точным квадратом.

4. Пусть $N = k^{2021} + 1$ при некотором натуральном $k > 10^6$ . На доске в указанном порядке в ряд выписаны числа $N, N-k, N-2k, \ldots, k+1, 1$. За один шаг с доски стирается самое левое из оставшихся чисел вместе со всеми своими делителями (если такие есть). Эту операцию проделали несколько раз, пока на доске не осталось ни одного числа. Какие числа были стёрты на последнем шаге?

5. Существует ли последовательность из миллиона натуральных чисел, взаимно простых с 10, в которой каждое следующее число делится на предыдущее, но имеет меньшую сумму цифр?

6. Пусть каждое из натуральных чисел $n, n+1, n+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число $n$ делится на куб некоторого своего простого делителя.

7. Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_k$ $(k > 1)$ — некоторые различные натуральные делители натурального числа $n$. Оказалось, что $d_k - d_{k-1} = d_{k-1} - d_{k-2} = \ldots = d_2 - d_1$ и $n = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$. При каких $n$ это возможно?

8. Докажите, что если простое число $p \neq 3$ является делителем числа вида $a^2 + 9$ для некоторого целого $a$, то $p$ является делителем числа вида $c^2 + 1$ для некоторого целого $c$.