Решения

1. **(7 баллов)** В алфавите племени Которас ровно 11 букв, любая последовательность букв является словом. Известно, что для каждого натурального k в языке этого племени имеется ровно пять k–буквенных неприличных слов. Докажите, что можно написать на стене такое приличное слово из 2022 букв, что, где бы MS Word ни вставил пробел, получатся два приличных слова.

   Решение. Покажем явно, как построить требуемое слово длины $n = 2022$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ поставим на i-ю позицию букву, которая не является ни конечной для неприличного слова длины i, ни начальной для неприличного слова длины $n + 1 - i$. Такая буква существует, так как есть не более 5 неприличных слов длины i и не более 5 слов длины $n + 1 - i$, а букв в алфавите — 11. Покажем, что построенное слово подходит под условие. Действительно, рассмотрим произвольный разрез построенного слова на 2, пусть разрез проходит между i-й и $i + 1$-й буквами. Тогда начальное слово не является неприличным по построению i-й буквы, а конечное — по построению $i + 1$-й буквы.

2. **(7 баллов)** Найдите все простые числа p и q, для которых каждое из чисел $p + 4q$ и $q + 4p$ — точный квадрат.

   Ответ: $(p, q) = (5, 5), (5, 29), (29, 5)$.

   Решение. Если $p = 2$, то $2 + 4q$ не является точным квадратом. Если $p = q$, то число $5p$ является точным квадратом только при $p = 5$. Отсюда получаем решение $p = q = 5$.

   Далее считаем, что $3 \leqslant q < p$. Так как $p + 4q$ и $q + 4p$ — точные квадраты, то $(p + 4q)(q + 4p) = t^2$ для некоторого целого t. То есть

$$4p^2 + 4q^2 + 17pq = t^2,$$

   что равносильно

$$(2(p + q))^2 + 9pq = t^2.$$

   Значит,

$$9pq = (t - 2(p + q))(t + 2(p + q)).$$

   Обозначим через $a = t - 2(p + q), b = t + 2(p + q)$. Тогда так как $ab = 9pq$ и $b > a$, то пара (a, b) может принимать следующие значения:

$$(1, 9pq),\quad (3, 3pq),\quad (9, pq),\quad (q, 9p),\quad (3q, 3p),\quad (9q, p),\quad (p, 9q),$$

   а в остальных парах $(qp, 9), (3p, 3q)$ и т.д. второе число меньше первого. также заметим, что $b - a = 4(p + q)$. Тогда если

- $(a, b) = (1, 9pq)$, то $9pq - 1 = 4(p + q)$. Но $4pq > 4p > 4q$, а значит, левая часть больше и решений нет.
- $(a, b) = (3, 3pq)$, то $3pq - 3 = 4(p + q)$. Значит, $9pq - 12p - 12q = 9$, откуда $(3p-4)(3q-4) = 25$. Так как $p > q$, то $3p-4 = 25, 3q-4 = 1$, что не возможно.
- $(a, b) = (9, pq)$, то $pq - 9 = 4(p + q)$. Значит, $(p - 4)(q - 4) = 25$. Так как $p > q$, то $p - 4 = 25, q - 4 = 1$, откуда получаем решение $p = 29, q = 5$.
- $(a, b) = (q, 9p)$, то $9p - q = 4(p + q)$. Значит, $5p = 3q$. Т.е. $p = 3, q = 5$. Нетрудно убедиться, что такая пара не является решением.
- $(a, b) = (3q, 3p)$, то $3p - 3q = 4(p + q)$, что невозможно.
- $(a, b) = (9q, p)$, то $p - 9q = 4(p + q)$, что невозможно.
- $(a, b) = (p, 9q)$, то $9q - p = 4(p + q)$. т.е. $5q = 5p$, что невозможно, так как $p > q$.

3. **(7 баллов)** Паша разрезал квадрат 2022×2022 на доминошки. После чего Вадим расставляет в клетках каждой доминошки числа 1 или -1 (в двух клетках одной доминошки одно и то же число). Вадим стремится, чтобы суммы во всех строчках были по модулю не более k. Для какого наименьшего k он может это сделать независимо от Пашиного разрезания?

Решение. *Оценка снизу.* Приведём пример разрезания, в котором сделать все суммы меньше 2 по модулю нельзя. Сделаем все доминошки горизонтальными. Тогда в каждой строке будет 1011 доминошек, то есть не может быть поровну клеток с $+1$ и с -1, значит сумма в каждой строке будет не равна 0, значит по модулю будет хотя бы 2.

Оценка сверху. Покажем как добиться того, чтобы в каждой линии сумма стала по модулю не более 2.

Лемма 1. Для любой пары соседних столбцов количество доминошек, которые содержат клетки эти столбцов, чётное.

Доказательство. Рассмотрим клетки в первых i столбцах. С одной стороны их $2022i$, то есть чётное число. С другой стороны эти клетки — это несколько полных доминошек и по одной клетке из каждой доминошки, идущей из столбца i в столбец $i+1$. Значит таких доминошек чётное число.

Вернёмся к задаче. Разобьём все горизонтальные доминошки, лежащие в одних и тех же столбцах, на пары. Мы собираемся ставить в доминошках из одной пары разные числа. Поэтому после того, как мы расставим числа в горизонтальных доминошек, во всех столбцах будет сумма 0. Добьёмся того, чтобы в строках сумма была по модулю не более 2. Тогда может будет сделать такую же процедуру с вертикальными доминошками.

Рассмотрим граф, вершины которого строки, а каждой паре горизонтальных доминошек сопоставим ребро между строками, в которых они лежат. У нас получился граф, в котором некоторые степени нечётные. Разобьём вершины с нечётной степенью на пары, проведём между вершинами из одной пары фиктивное ребро. Теперь степень каждой вершины чётная, то есть в графе есть эйлеров цикл. Рассмотрим порядок обхода рёбер по этому циклу. Этот порядок для каждого ребра закрепляет, где начало, а где конец. Давайте во всех нефиктивных рёбрах в доминошке из строки начала ребра ставить $+1$, а в конце ребра -1. Тогда для каждой строки количество рёбер, начинающихся в ней, такое же, как и заканчивающихся. Поэтому если бы фиктивных рёбер не было, то в каждой строке была бы сумма 0, но поскольку в каждой вершине максимум одно ребро фиктивная, то сумма по модулю не превосходит 2.

4. Вписанная в четырёхугольник $ABCD$ окружность ω касается его сторон BC и AD в точках E и F соответственно. Прямая ED вторично пересекает ω в точке X. Оказалось, что описанная окружность FXD касается прямых AB и CD.

(а) (3 балла) В каком отношении точка F делит отрезок AD?

(б) (4 балла) Докажите, что точки A, F, X, C лежат на одной окружности.

5. **(7 баллов)** В последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равно 1, а число a_n при $n \geqslant 2$ равно $a_{n-1} + 3$, если $n - 1$ встречается среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, и $a_{n-1} + 2$ в противном случае. Докажите, что $a_n < n(1 + \sqrt{2})$ при всех натуральных n.

Решение. Обозначим через $f(n)$ количество натуральных чисел, меньших n и являющихся членами последовательности. Условие означает, что $a_n = 2n - 1 + f(n)$.

Мы докажем индукцией по n более сильное, чем в условии задачи, утверждение:

$$(n-1)(\sqrt{2}+1) < a_n < n(\sqrt{2}+1).$$

Базу индукции для $n \leqslant 3$ придётся проверить прямым вычислением.

Предположим, что утверждение доказано для первых $n-1$ членов последовательности, и докажем его для a_n.

Неравенство $a_n < n(\sqrt{2}+1)$ эквивалентно неравенству $f(n) < n(\sqrt{2}-1)+1$. Пусть последнее неверно. Это значит, что существует $k \geqslant n(\sqrt{2}-1)+1$, для которого $a_k < n$. Поскольку $n \geqslant 4$ и, следовательно, $n(\sqrt{2}-1)+1 \leqslant n-1$, мы можем считать, что $k \leqslant n-1$, и использовать индукционное предположение: $a_k > (k-1)(\sqrt{2}+1) \geqslant n(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = n$, противоречие.

Аналогично, второе неравенство $a_n > (n-1)(\sqrt{2}+1)$ эквивалентно неравенство $f(n) > (n-1)(\sqrt{2}-1)-1$. Если оно неверно, то существует $k \leqslant (n-1)(\sqrt{2}-1)$, для которого $a_k \geqslant n$. К счастью, $(n-1)(\sqrt{2}-1)$ точно не больше $n-1$, и можно применять индукционное предположение без лишних разговоров:

$$a_k < k(\sqrt{2}+1) \leqslant (n-1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = n-1,$$

противоречие, которое доказывает второе неравенство.