Аффинная стереометрия

1. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины рёбер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$ соответственно. Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

2. Дан тетраэдр $ABCD$.
(а) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке (назовём её G) и делятся ей в отношении $3:1$, считая от вершины.
(б) Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, также проходят через G и делятся ей пополам.

3. **Теорема Менелая.** На рёбрах AB, BC, CD, DA пространственной неплоской ломаной $ABCD$ отмечены точки K, L, M, N соответственно. Докажите, что K, L, M, N лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = 1.$$

4. Четыре сферы касаются друг друга внешним образом. Соединим точку касания двух из них с точкой касания двух оставшихся. Докажите, что три построенных (выбирая разные разбиения сфер на пары) отрезка пересекаются в одной точке.

5. Тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу с центром в точке O. Пусть ℓ_A — прямая, соединяющая точку пересечения медиан грани BCD с точкой, симметричной A относительно O. Аналогично определены прямые ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D.
(а) Докажите, что прямые $\ell_A, \ell_B, \ell_C, \ell_D$ пересекаются в одной точке (назовём её X).
(б) Докажите, что прямая, соединяющая X с серединой ребра AB, перпендикулярна CD.

6. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — соответственно середины рёбер SA, SB, SC, SD четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что пространственные четырёхугольники ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

7. Докажите, что плоскость, проходящая через середины противоположных рёбер тетраэдра, делит его на две части равного объёма.

8. Пятигранник $ABCA_1B_1C_1$ имеет две треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ и три грани — выпуклые четырёхугольники ABB_1A_1, BCC_1A_1, CAA_1C_1, причём его рёбра AA_1, BB_1, CC_1 параллельны (*кажется, это называется косоусечённой призмой*). Пусть P и P_1 — точки пересечения троек плоскостей A_1BC, AB_1C, ABC_1 и $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$ соответственно. Докажите, что $PP_1 \parallel AA_1$.