

## Ориентированные графы

1. Докажите, что на рёбрах любого графа можно расставить стрелки так, чтобы для каждой вершины модуль разности входящей и исходящей её степени не превосходил 1.
2. В стране некоторые пары городов соединены одной дорогой. На всех дорогах введено одностороннее движение. Известно, что из любого города можно добраться до любого другого не более, чем с одной пересадкой. Одну дорогу закрыли на ремонт, причём из любого города по-прежнему можно добраться до любого другого. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать не более, чем с двумя пересадками.
3. Пусть  $G$  — сильно связный ориентированный граф без чётных простых ориентированных циклов. Докажите, что для любой раскраски вершин графа  $G$  в два цвета найдётся вершина, имеющая тот же цвет, что и все вершины, в которые из неё ведут рёбра.
4. Рёбра выпуклого многогранника ориентировали таким образом, что из каждой вершины выходит хотя бы одна стрелка и в каждую вершину входит хотя бы одна. Докажите, что рёбра некоторой грани образуют ориентированный цикл.
5. Даны  $N > 3$  точек, занумерованных числами  $1, 2, \dots, N$ . Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего номера к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовём однотонной, если нет двух таких точек  $A$  и  $B$ , что от  $A$  до  $B$  можно добраться и по красным стрелкам, и по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.
6. В стране несколько городов, соединённых дорогами с односторонним и двусторонним движением. Известно, что из каждого города в любой другой можно проехать ровно одним путём, не проходящим два раза через один и тот же город. Докажите, что страну можно разделить на три губернии так, чтобы ни одна дорога не соединяла два города из одной губернии.
7. В стране, состоящей из двух республик  $A$  и  $B$ , провели несколько дорог с односторонним движением из городов республики  $A$  в города республики  $B$ , так, что из каждого города республики  $A$  выходит хотя бы одна дорога и в каждый город республики  $B$  входит как минимум одна дорога. В республиках по 100 городов. Докажите, что можно провести не более 100 новых дорог с односторонним движением так, чтобы из любого города стало возможным доехать до любого другого. Разрешается соединять два города несколькими дорогами.
8. В стране несколько городов, некоторые соединены односторонней дорогой. Докажите, что можно объявить некоторые города «транспортными узлами» так, чтобы при этом до любого другого города из какого-нибудь транспортного узла можно бы-

ло бы доехать максимум с одной пересадкой, а между транспортными узлами дорог не было?