Третьи задачи

1. Существует ли бесконечная ограниченная последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ такая, что для любых $i \neq j$ верно
$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^2 \geqslant 1?$$

2. Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трёх арбузов. За какое наименьшее количество взвешиваний можно найти суммарный вес всех арбузов?

3. На столе лежат купюры достоинством $1, 2, \ldots, 2n$ тугриков. Двое ходят по очереди. Каждым ходом игрок снимает со стола две купюры, большую отдает сопернику, а меньшую забирает себе. Каждый стремится получить как можно больше денег. Сколько тугриков получит начинающий при правильной игре?

4. Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Имеются колпаки 25 различных цветов, заранее известных мудрецам. Султан сообщил, что на каждого из мудрецов наденут один из этих колпаков, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков, то все числа будут различны. Каждый мудрец будет видеть колпаки остальных мудрецов, а свой колпак нет. Затем все мудрецы одновременно огласят предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

5. Перестановку целых чисел $1, 2, \ldots, m$ будем называть *свежей*, если не существует положительного целого $k < m$ такого, что первые k чисел в этой перестановке — это $1, 2, \ldots, k$ в некотором порядке. Пусть f_m — количество всех свежих перестановок чисел $1, 2, \ldots, m$. Докажите, что $f_n \geqslant n \cdot f_{n-1}$ для всех $n \geqslant 3$.

6. Известно, что среди внешне неразличимых монет на столе ровно k фальшивых и n настоящих. Кроме того, известно, что все настоящие монеты весят одинаково, а все фальшивые тоже весят одинаково и меньше настоящих. Есть чашечные весы без гирек, при взвешивании на которых можно класть не более одной монеты на каждую чашу. Кроме того, весы всегда показывают неправильный результат (любой из двух по своему желанию). Какое наибольшее количество монет каждого типа можно гарантированно определить, если количество взвешиваний не ограничено?

7. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведённой из прямого угла.

8. Рассмотрим треугольник ABC, у которого $\angle BCA > 90^\circ$. Радиус окружности Γ, описанной около треугольника ABC, равен R. На отрезке AB нашлась точка P такая, что $PB = PC$, а длина отрезка PA равна R. Серединный перпендикуляр к отрезку PB пересекает окружность Γ в точках D и E.

Докажите, что точка P является центром вписанной окружности треугольника CDE.

9. Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel BC$) вписана в окружность ω; M и N — середины не содержащих отмеченных точек дуг BC и AD соответственно. Пусть P — точка касания вписанной окружности треугольника ABD со стороной AD, а Q — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Докажите, что прямые MQ и NP пересекаются на ω.